Actes Inst. Agron. Vet. (Maroc) 2003, Vol. 23(2-4): 101-107

Vérification des conditions d'application de l'analyse de la variance sur les résultats d'une expérience en champ

Ahmed GOUMARI*

(Reçu le 08/07/2002 ; Accepté le 15/07/2003)

فحص ظروف تطبيق تحليل التباين حول نتائج تجربة في الحقل

في إطار الإستشارات الإحصائية تبين لنا أنه غالبا ما يكون هناك إفراط في استعمال طريقة تحليل التباين. فالمستعمل بصفة عامة يرتبط بتأويل نتائج جدول التباين بدون أن يتأكد أن شروط تطبيق هذه الطريقة مقبولة. ومن أجل التوضيح، وبناء على المعطيات الناتجة عن تجربة في الحقل قد تم فحص ظروف التطبيق الرئيسية لهذه الطريقة كما تم شرح شامل للنتائج.

الكلمات المفتاحية : تحليل التباين ـ نموذج جمعي ـ الإنبساط ـ التجانس ـ التوزيع المعتدل ـ عدم التماثل ـ المقارنات المتعددة

Vérification des conditions d'application de l'analyse de la variance sur les résultats d'une expérience en champ

Dans le cadre des consultations statistiques, il nous a été donné de constater que l'analyse de la variance est une méthode souvent utilisée de manière abusive. L'utilisateur s'attache, généralement, à interpréter les résultats du tableau d'analyse de la variance, sans s'assurer que les conditions d'application de la méthode sont acceptables. À titre d'illustration et sur la base de données résultant d'une expérience en champ, il est procédé à une vérification des principales conditions d'application de cette méthode ainsi qu'à une interprétation complète des résultats.

Mots clés: Analyse de la variance - Normalité - Dissymétrie - Aplatissement - Additivité - Homoscédasticité - Comparaisons multiples

Testing for conditions of application of the analysis of variance on the results of a field experiment

Within the framework of the statistical consultations, it was given to us to note that analysis of the variance is a method often used in an abusive way. The user endeavours, generally, to interpret the results of the table of analysis of the variance, without making sure that the conditions for application of the method are acceptable. By way of illustration and on the basis of the data of a field experiment, it is proceeded to a verification of the main conditions of application of this method as well as a complete interpretation of results.

Key words: Analysis of variance - Normality - Skewness - Kurtosis - Additivity - Homoscedasticity - Multiple comparisons

* Département de Statistique Appliquée, Institut Agronomique et Vétérinaire Hassan II, BP 6202, Rabat (Maroc)
E-mail : a.goumari@iav.ac.ma

INTRODUCTION

L'analyse de la variance est une méthode statistique dont l'objectif est de comparer les moyennes de plusieurs populations supposées normales, de même variance, à partir d'échantillons aléatoires et indépendants.

Dans le cas d'une expérience en champ, l'expérimentateur réalise l'analyse de la variance dans le but de savoir si les effets des traitements sont identiques, ou, en d'autres termes, si l'effet "traitement" est "significatif". Cependant, souvent, ces investigations vont rarement au-delà de la réponse à cette question.

En fait, une bonne analyse des résultats de l'analyse de la variance doit également examiner les conditions dans lesquelles la méthode a été utilisée. En effet, l'utilisation de l'analyse de la variance suppose la réalisation de certaines hypothèses. La validité des conclusions dépend du degré de réalisation de ces hypothèses.

Après la présentation du plan et des résultats d'une expérience en champ, ainsi que du modèle d'analyse de la variance associé (§ 1), on a procédé à une interprétation complète des résultats de l'analyse.

MATÉRIEL & MÉTHODES

1. Plan d'expérience

Il s'agit d'une expérience en champ organisée selon un dispositif en blocs aléatoires complets.

L'objectif est la comparaison des rendements de 9 variétés d'orge (V1 à V9). Un nombre de 4 blocs a été adopté. Le plan ainsi que les résultats observés (rendements parcellaires exprimés en qx / ha) sont présentés dans la figure 1.

2. Modèle d'analyse de la variance

Une expérience en blocs aléatoires complets avec un facteur étudié correspond à un modèle d'analyse de la variance croisé mixte à 2 critères de classification:

Blocs	.... Variétés (i)							
(j)	1	2	3	.	.	.	.	p
1	y_{11}		.		.			y_{p1}
2								
3	.							.
.				y_{ij}				
.	.							.
.								
q	y_{1q}		.		.			y_{pq}

Les données sont ajustés au modèle théorique qui s'écrit:

$$\mathbf{Y_{ij} = m + a_i + B_j + e_{ij}}$$

Où Y_{ij} représente l'observation de la variété i dans le bloc j; m est la moyenne générale; a_i est l'effet propre de la variété i; B_j est l'effet du bloc j et e_{ij} est un résidu qui provient d'une hétérogénéité non contrôlée. Ces résidus sont supposés aléatoires, indépendants, ayant une distribution normale, de variance σ^2 et de moyenne nulle.

Le modèle théorique ci-dessus est par construction additif, c'est-à-dire que le rendement est le résultat de l'addition d'un effet moyen du champ, d'un effet variété et d'un effet bloc. On suppose donc qu'il n'y a pas d'interaction entre les facteurs variétés et blocs.

Les effets variétés et blocs peuvent s'exprimer:

$$\mathbf{a_i = m_{i}. - m \text{ et } B_j = m._j - m}$$

$m_i.$ et $m._j$ étant la moyenne de la variété i et la moyenne du bloc j.

L'hypothèse à tester (l'absence d'effet du facteur variétés) s'écrit alors:

Ho: $a_i = 0$

Bloc 1	V8 30,30	V1 34,50	V5 39,10	V9 40,20	V2 35,50	V3 39,60	V6 42,0	V7 28,00	V4 37,00
Bloc 2	V6 48,50	V8 31,50	V2 36,50	V7 26,50	V3 39,20	V5 41,00	V4 36,20	V1 33,00	V9 38,50
Bloc 3	V7 29,20	V1 35,00	V6 47,20	V3 40,50	V4 36,00	V2 37,50	V5 42,00	V9 39,00	V8 33,00
Bloc 4	V6 45,20	V7 31,00	V4 37,60	V3 41,00	V9 38,40	V1 36,00	V8 33,00	V5 39,00	V2 36,00

Figure 1. Plan et résultats de l'essai (qx/ha)

La finalité de toute analyse de la variance est l'établissement d'un tableau où la variance totale est décomposée en un certain nombre de composantes qui correspondent aux différents facteurs en présence et qu'on appelle tableau d'analyse de la variance (Tableau 1).

Tableau 1. Tableau d'analyse de la variance attendu

Sources de variation	Degrés de liberté	SCE	CM	F_{obs}
Variétés	p - 1	SCE_a	CM_a	F_a
Blocs	q - 1	SCE_B	CM_B	F_B
Résiduelle	(p - 1)(q -1)	SCE_r	CM_r	
Total	pq - 1	SCE_T		

La variance résiduelle, appelée aussi erreur, contient la variabilité due à des facteurs non (ou mal) contrôlés tels que l'hétérogénéité du sol et du matériel végétal ou encore les imprécisions au niveau des mesures. Cette variance résiduelle sert de base de référence pour le test relatif au facteur étudié.

Ainsi, l'hypothèse d'égalité des rendements moyens des 9 variétés (Ho) est testée en calculant le rapport de la variance (ou carré moyen) entre variétés à la variance résiduelle (ou carré moyen résiduel). Lorsque les conditions du modèle théorique sont réalisées sous Ho, ce rapport suit une loi de Fisher.

On peut ainsi calculer la probabilité d'observer une valeur F supérieure à celle qui est observée dans l'essai.

On rejettera l'hypothèse d'égalité lorsque cette probabilité se trouve supérieure à un niveau α appelé risque de première espèce, fixé par l'expérimentateur. Des valeurs de α de 0,05 ou 0,01 sont les plus souvent retenues.

En d'autres termes, l'hypothèse nulle sera rejetée (RHo), lorsque $F_a = CM_a / CM_r$ est supérieure ou égale à $F_{1-\alpha}$ aux degrés de liberté (p-1) et (p-1)(q-1).

RÉSULTATS & DISCUSSION

1. Interprétation des résultats de l'analyse de la variance

La plupart des logiciels statistiques donnent les éléments permettant de critiquer les conditions d'application de l'analyse de la variance. La première étape doit donc être l'examen de ces éléments afin de vérifier le bien fondé du modèle statistique adopté.

1.1. Vérification des hypothèses de l'analyse de la variance

1.1.1. *Normalité des résidus*

Le calcul des résidus s'effectue selon l'expression:
e_{ij} = Yij - m - (m_i.-m) - ($m_{.j}$ -m) = Y_{ij} - m_i. - $m_{.j}$ +m

Pour apprécier la normalité de la distribution des résidus, on construit un histogramme de ces résidus et on le compare visuellement à la courbe en cloche caractéristique d'une distribution normale. La normalité est alors rejetée dans 2 situations: lorsque la distribution observée présente 2 modes (ou plus) ou lorsqu'elle présente une dissymétrie prononcée.

L'appréciation de la normalité peut être rendue plus précise par l'examen des paramètres de symètrie (B_1) et d'aplatissement (B_2) de Pearson. Rappelons que, pour une série statistique, ces deux paramètres peuvent être calculés selon les formules suivantes:

$$B_1 = \frac{m_3^2}{m_2^3} \; ; \; B_2 = \frac{m_4}{m_2^2}$$

Où

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})^k$$

Pour une distribution normale, B_1 vaut zéro et B_2 vaut 3. Les écarts par rapport à ces normes sont considérés comme importants lorsque la probabilité de les observer est faible.

Pour notre exemple, l'histogramme des résidus est montré dans la figure 2.

Ainsi, on constate que l'allure de l'histogramme est assez proche de celle d'une distribution normale. Par ailleurs, en ce qui concerne les indices de normalité, leurs valeurs et les probabilités correspondantes sont les suivantes:

Symétrie	B_1 = 0,01	Proba= 0,8547
Aplatissement	B_2 = 3,66	Proba= 0,3884

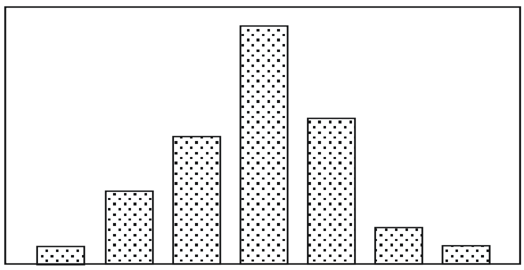

Figure 2. Histogramme des résidus

Les probabilités pour les deux indices étant largement supérieures à 0,05 (seuil couramment utilisé), la normalité de la distribution des résidus est donc acceptée.

1.1.2. *Égalité des variances résiduelles intra-variétés et intra-blocs*

À partir des résidus de chaque parcelle, les variances sont calculées pour chaque variété et chaque bloc. L'homogénéité de ces variances (ou écarts-types) peut être vérifiée grâce au test de Bartlett. Ce test consiste à calculer une statistique ($KHI2_{obs}$) qui suit une loi de KHI2.

Partant de l'hypothèse d'égalité des variances, on calcule la probabilité pour qu'un KHI2 soit égal ou supérieur à $KHI2_{obs}$. On accepte l'égalité des variances lorsque cette probabilité est supérieure au seuil retenu (généralement 0,05) et on rejette cette égalité dans le cas contraire.

$$KHI2_{obs} = \frac{2{,}3026\ (n-1)\left[p \log\left(\frac{SCE}{p}\right) - \sum_{i=1}^{p} \log SCE_i\right]}{1 + \frac{(p+1)}{3p(n-1)}}$$

p représente le nombre de populations dont on veut comparer les variances; n représente le nombre d'observations par population, SCE représente, la somme des carrés des écarts totale des observations et SCE_i la somme des carrés des écarts des observations par population.

Dans le cas de l'exemple étudié, le tableau 2 donne les valeurs des écarts types pour les facteurs variétés et le facteur blocs ainsi que les valeurs du KHI2 et des probabilités correspondantes.

L'examen de ce tableau et, en particulier de la dernière ligne, montre que la probabilité d'observer de telles valeurs de KHI2 est assez grande, autrement dit l'hypothèse d'égalité des variances des résidus est acceptée.

Tableau 2. Écarts-types des résidus

Variétés	Écarts-types Intra-variétés	Blocs	Écarts-types intra-blocs
1	1,04	1	1,37
2	0,58	2	1,43
3	0,51	3	0,76
4	1,06	4	1,17
5	1,31		
6	2,54		
7	1,56		
8	0,66		
9	1,36		
KHI2 = 11,17		KHI2 = 3,22	
Proba = 0,1913		Proba = 0,3595	

1.1.3. *Indépendance des résidus*

Pour vérifier l'indépendance des résidus, c'est-à-dire l'absence de liaison entre deux parcelles voisines, un moyen simple consiste à établir une cartographie des résidus. Il s'agit de constituer 3 à 4 classes de résidus et à chaque classe on attribue un symbole particulier. Sur le plan même de l'essai, les résidus sont alors représentés en utilisant les symboles retenus. Une répartition aléatoire des symboles sur le plan correspond à une indépendance des résidus.

Pour l'essai considéré, 4 classes de résidus ont été adoptées avec les symboles et limites suivants:

......		//////		\\\\\\		*****
......	< - 0,789	//////	< 0,000	\\\\\	< 0,789	*****
......		//////		\\\\\\		*****

La représentation des résidus sur le plan en utilisant ces symboles se trouve dans la figure 3.

L'observation de la cartographie des résidus indique une répartition des taches qui peut être considérée comme parfaitement aléatoire. En effet, on ne relève pas de tendance, ni la présence de zones individualisées.

Bloc 1	......	\\\\\	//////	****	//////	\\\\\	......	\\\\\	****
	......	\\\\\	//////	****	//////	\\\\\	......	\\\\\	****
	......	\\\\\	//////	****	//////	\\\\\	......	\\\\\	****
Bloc 2	****	//////	\\\\\	......	//////	****	//////	......	//////
	****	//////	\\\\\	......	//////	****	//////	......	//////
	****	//////	\\\\\	......	//////	****	//////	......	//////
Bloc 3	//////	//////	****	//////	......	\\\\\	****	//////	\\\\\
	//////	//////	****	//////	......	\\\\\	****	//////	\\\\\
	//////	//////	****	//////	......	\\\\\	****	//////	\\\\\
Bloc 4	......	****	\\\\\	\\\\\	......	****	\\\\\	......	......
	......	****	\\\\\	\\\\\	......	****	\\\\\	......	......
	......	****	\\\\\	\\\\\	......	****	\\\\\	......	......

Figure 3. Cartographie des résidus

L'hypothèse d'indépendance peut donc être acceptée.

1.1.4. Additivité du modèle

Dans le modèle théorique énoncé au paragraphe suivant, il faut préciser que les résidus e_{ij} sont en réalité composés, d'une part, d'une éventuelle interaction entre les facteurs variétés et blocs et, d'autre part, d'une variation résiduelle proprement dite. Le test de Tukey permet de dissocier ces deux composantes en vue de comparer leurs ordres de grandeur. L'additivité du modèle est rejetée lorsque la variance d'interaction se trouve supérieure à la variance résiduelle (probabilité inférieure à 0,05).

L'existence d'une interaction variétés-blocs signifie que les variétés réagissent différemment les unes des autres selon le niveau d'hétérogénéité des blocs. Cela peut aussi correspondre à une mauvaise disposition des blocs sur le terrain. En tous cas, cette situation rendrait l'interprétation des résultats beaucoup moins aisée.

Ce test est réalisé en calculant:

$$SCE_{add} = \frac{\left[\sum_i \sum_j Y_{ij} \left(Y_{i.} - Y_{..}\right)\left(Y_{.j} - Y_{..}\right)\right]^2}{\left[\sum_i \left(Y_{i.} - \overline{Y}_{..}\right)^2\right]\left[\sum_j \left(Y_{.j} - \overline{Y}_{..}\right)^2\right]}$$

et $$F_{add} = \frac{SCE_{add}}{\left[\frac{(SCE_r - SCE_{add})}{(p-1)(q-1)-1}\right]}$$

avec:

Y_{ij}= observation pour le traitement i dans le bloc j

$\overline{Y}_{i.}$ = moyenne du traitement i

$\overline{Y}_{.j}$ = moyenne du bloc j

$\overline{Y}_{..}$ = moyenne générale

L'additivité est alors rejetée lorsque F_{add} est supérieur aux degrés de liberté $F_{1-\alpha}$ à 1 et (p - 1)(q - 1).

Le test de Tukey a été appliqué aux résultats de l'expérience et la probabilité correspondante est de 0,7924. Cela indique l'existence d'une interaction variétés-blocs très faible. Son absence sera donc admise.

1.2. Analyse de la variance

Les calculs de l'analyse de la variance pour l'essai étudié conduisent au tableau 3.

Tableau 3. Analyse de la variance

Sources de variation	Degrés de liberté	Σ carrés des écarts	Carrés moyens	F observé	Proba
Facteur variétés	8	805,27	100,66	51,33	0,0000
Facteur blocs	3	12,06	4,02	2,05	0,1325
Variation résiduelle	24	47,06	1,96		
Variation totale	35	864,39			

La plupart des logiciels statistiques fournissent également pour chacune des F observés la quantité Proba = $P(F>F_{obs})$ c'est-à-dire la probabilité qu'une variable de Fisher prenne une valeur supérieure à la valeur observée dans l'expérience. Il y aura donc rejet de l'hypothèse nulle (RHo) au niveau α lorsque Proba est inférieure à α.

Dans notre essai, la probabilité de F du facteur variétés est même inférieure à 0,0001. Une telle probabilité indique qu'il faut rejeter l'égalité des rendements moyens des 9 variétés et que les différences sont même très hautement significatives.

En ce qui concerne le facteur bloc, il peut, de la même façon, être testé par rapport à la variation résiduelle. Cependant, il ne s'agit que d'un facteur dit contrôlé et son test ne présente pas beaucoup d'intérêt.

Néanmoins, l'ordre de grandeur de F calculé du facteur blocs peut être un indice de l'efficacité du contrôle de l'hétérogénéité. Une valeur de F inférieure à 1 correspond à une inefficacité des blocs (terrain homogène). Plus cette valeur est élevée, plus le contrôle peut être considéré comme efficace. Dans notre exemple, une valeur F de 2,05 devrait satisfaire l'expérimentateur.

À la suite du tableau d'analyse de la variance (Tableau 3), certains logiciels calculent aussi la puissance de l'essai. Celle-ci peut être définie comme la probabilité de rejeter l'hypothèse Ho compte tenu des différences réelles observées entre les moyennes.

1.3. Comparaisons multiples de moyennes

Après avoir rejeté l'hypothèse d'égalité des rendements des 9 variétés, l'expérimentateur peut se demander quelle est la meilleure variété, ou encore quelles sont les variétés dont le rendement peut être considéré comme identique.

Les éléments de réponse peuvent être fournis par un test complémentaire comme le test de Newman & Keuls. Le principe de ce test consiste à calculer pour tout groupe de p moyennes l'amplitude observée et de la comparer à la plus petite amplitude significative (p.p.a.s) correspondante:

$$A_p = q_{1-\alpha}\sqrt{\frac{CM_r}{n}}$$

$q_{1-\alpha}$ est une valeur proposée par Newman & Keuls, elle dépend du niveau de signification (α), du nombre de moyennes considérées (p) et du nombre de degrés de liberté (k) du carré moyen servant de base de comparaison (CMr).

Le paramètre n représente le nombre d'observations ayant servi au calcul de chaque moyenne.

Lorsque l'amplitude observée pour p moyennes est inférieure à la p.p.a.s, les p moyennes considérées constituent un groupe homogène.

Le test de Newman & Keuls appliqué à notre exemple (pour une valeur α = 0,05) a permis d'obtenir les résultats suivants:

Variétés	Moyennes	Groupes homogènes				
6	45,72	A				
5	40,28		B			
3	40,08		B			
9	39,03		B			
4	36,70			C		
2	36,38			C		
1	34,63			C		
8	31,95				D	
7	28,67					E

D'après les résultats obtenus, la variété 6 se présente donc comme étant la meilleure, du fait qu'elle assure le rendement le plus élevé. Elle est ensuite suivie par un groupe de 3 variétés (5; 3 et 9) permettant un rendement autour de 40 quintaux à l'hectare.

Les variétés 4, 2 et 1, sans se distinguer entre elles, donnent un rendement relativement moins bon que les précédentes.

Les variétés 8 et 7, tout en étant significativement différentes, peuvent être considérées comme les plus mauvaises.

CONCLUSIONS

À travers les résultats d'une expérience en champ, on a illustré les étapes par lesquelles doit nécessairement passer une interprétation correcte des résultats de l'analyse de la variance. Ces étapes comprennent, d'abord, la vérification des hypothèses de la méthode, comme la normalité, l'égalité des variances, l'indépendance des résidus ainsi que l'additivité du modèle.

L'examen du tableau d'analyse de la variance permet, ensuite, de savoir si le facteur étudié est “significatif”, et également de s'interroger sur l'efficacité du facteur (bloc) destiné à contrôler l'hétérogénéité.

Lorsque le facteur étudié est “significatif”, les conclusions peuvent être enrichies par la réalisation d'un test de comparaisons multiples en vue de constituer des groupes de moyennes homogènes.

Cependant, si au niveau de l'exemple considéré, toutes les hypothèses de l'analyse de la variance se trouvent réalisées, cela n'est malheureusement pas toujours le cas.

Les situations de non respect de l'une ou l'autre des conditions d'application sont assez fréquentes.

Dans ces cas là, les transformations de variables peuvent constituer une alternative pour remédier à cela.

Une transformation logarithmique, par exemple, peut assurer une certaine normalité des distributions ou une certaine égalité des variances ou même rendre un modèle additif.

Lorsque les transformations de variables s'avèrent inefficaces pour remédier au non respect des conditions d'application, il est préférable de s'orienter vers des tests non paramétriques. Pour ceux-ci, seuls les caractères aléatoires et indépendants des échantillons doivent être respectés.

Cependant, le principe des ces méthodes se base sur le remplacement des valeurs observées par leurs rangs. Ce remplacement se traduit, inévitablement, par une perte d'information et, par conséquent, ces tests non paramétriques sont moins puissants que l'analyse de la variance.

RÉFÉRENCES CITÉES

Dagnelie P (1998a) Statistique théorique et appliquée. Tome 1: Statistique descriptive et bases de l'inférence statistique. Paris, Bruxelles, De Boeck &t Larcier, 508 p.

Dagnelie P (1998b) Statistique théorique et appliquée. Tome 2: Inférence statistique à une et deux dimensions. Paris, Bruxelles, De Boeck & Larcier, 659 p.

Dagnelie P (1981) Principes d'expérimentation. Gembloux, Presses Agronomiques, 182 p.

Gouet JP & Philippeau G (1982) Comment interpréter l'analyse statistique d'un essai. Paris, Institut Technique des Céréales et des Fourrages, 32 p.

Tukey JW (1949) One degree of freedom for non aditivity. *Biometrics* 5: 232-242