

Modélisation numérique d'écoulements pulses de fluides plastiques en conduites déformables à parois élastiques poreuses et isotropes

Kamal GUERAOUI *[✧], Mohamed HAMI *, Abdellah HAMMOUMI *,
Abderrahim MRABTI *, Mohamed KERROUM * & Gamal ZEGGWAGH *

(Reçu le 27/04/1995 ; Accepté le 27/05/1996)

نموذج تحليلي لجريان نبضي لسوائل غير نيوتونية داخل قنوات مرنة ذات بطانة مثقبة و موحدة الخواص

تهدف من خلال هذه المساهمة إلى دراسة بعض التأثيرات المتميزة على الجريان النبضي الغير نيوتوني الناتجة عن مرونة و توحيد خواص المسالك و البطانة المثقبة. بتطبيق طريقة تحليلية تعتمد على مبدأ الفرق النهائي، و نحدد توزيع الضغط و سرعة الصبيب. كما تهدف إلى فهم بعض العوامل المؤثرة على جريان الدم في الأوردة و الشرايين.

الكلمات المفتاحية : طريقة تحليلية - جريان نبضي - سائل غير نيوتوني - بطانة مثقبة - قناة مرنة و موحدة الخواص.

Modélisation numérique d'écoulements pulses de fluides plastiques en conduites déformables à parois élastiques poreuses et isotropes

L'objet du présent travail consiste à mettre en évidence, dans un écoulement pulsé, certains effets caractéristiques dus au comportement plastique du fluide, au comportement élastique isotrope de la paroi et à sa porosité. À l'aide d'une méthode numérique itérative aux différences finies, la pression et la vitesse de débit dans la conduite ont été déterminées. Cette contribution à la compréhension de certains aspects de l'écoulements sanguin dans les artères peut aussi s'appliquer à des écoulements de type industriel .

Mots clé : Écoulement pulsé - Fluide plastique - Conduite élastique isotrope - Paroi poreuse - Méthode numérique - Hydrodynamique

Numerical modelisation of pulsatile flows of plastic fluids through isotropic porous elastic pipes

A numerical study concerning pulsatile flows of plastic fluids through isotropic porous elastic ducts is presented. The objective is to investigate the effects of porosity, and elasticity of pipe wall material for a generalized Bingham fluid. An implicit difference method is used to resolve the equations, we determine the pressure and the flow rate distributions. This study can be considered as a step in modelling of flow in blood vessels, may also contribute to other important fields such as water desalination or gel filtration.

Key words : Pulsatile flow - Plastic fluid - Porous pipe - Numerical method - Isotropic elastic duct - Hemodynamics

* Groupe de Mécanique des Fluides et des Structures, Laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences de Rabat, Maroc

[✧] Auteur correspondant

INTRODUCTION

La grande majorité des travaux relatifs aux écoulements de fluides en conduites déformables a pour but de modéliser l'écoulement sanguin en différents sites du réseau vasculaire.

Ces études aussi bien théoriques qu'expérimentales d'écoulements sanguins conduisent à retenir trois types de paramètres à savoir :

- les paramètres liés à la nature du fluide choisi pour modéliser le comportement du sang. Ceux-ci apparaissent au sein de l'équation dite de comportement rhéologique du fluide, qui obéit soit à la loi de Newton (Hammoui *et al.*, 1993), soit à des lois non-newtoniennes de type Casson, (Casson, 1959), Ostwald (Bellet, 1973), Quemada (Quemada, 1978) ou Bingham généralisé (Guerraoui *et al.*, 1995).
- les paramètres caractérisant la nature et la géométrie de la paroi du conduit où se produit l'écoulement ; ils interviennent aussi bien au niveau des conditions qu'au niveau de la structure qu'ils imposent à l'écoulement ; une modélisation fine des écoulements réels, bien que tenant souvent compte d'hypothèses simplificatrices, aboutit à des équations très complexes ; ces complexités proviennent essentiellement des conditions géométriques qui limitent l'écoulement (Ly *et al.*, 1981 ; Theodorou, 1983 ; Bitoun, 1985 ; Zeggwagh, 1988 ; Rakotomalala & Bellet, 1991 ; Hammoui *et al.*, 1993 ; Guerraoui *et al.*, 1995) ;
- les paramètres liés aux conditions hydrodynamiques (Bahrar, 1986 ; Rakotomalala, 1989).

L'originalité de cette étude provient de la prise en considération simultanée des caractères bidimensionnel et non permanent de l'écoulement, de la prise en compte des termes d'inertie, du comportement non linéaire du fluide (fluide de Bingham généralisé) et du caractère élastique isotrope et poreux de la paroi de la conduite. Cette approche, qui ne concerne que la modélisation d'écoulements sanguins au niveau de la grande et de la petite circulation, s'effectue par voie théorique.

Les phénomènes qu'on a analysés sont relatifs à des régimes périodiques. Les développements numériques permettent d'étudier, en outre, l'effet des paramètres rhéologiques du fluide et de la paroi sur l'ensemble de l'écoulement. Pour illustrer ces effets, on a présenté l'évolution des profils de pression et les distributions de la vitesse de débit dans la conduite.

MÉTHODES

1. Modèle théorique

1.1. Géométrie et équations

On considère l'écoulement pulsé d'un fluide de Bingham généralisé, de masse volumique ρ et de viscosité apparente η_a . En chaque point $M(r, z)$ de la conduite considérée, les vitesses axiale et radiale sont $w(r, z, t)$ et $u(r, z, t)$. Les déplacements axial et radial sont $B(z, t)$ et $A(z, t)$.

La conduite considérée est un tube axisymétrique souple, isotrope, poreux, de longueur L , de masse volumique ρ_p , d'axe \vec{oz} et de rayon R_0 au repos.

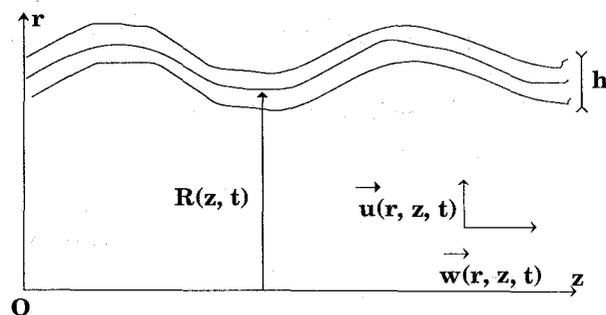


Figure 1. Schéma de la conduite

En l'absence d'efforts volumiques, la déformabilité de la conduite est décrite par l'équation [1] :

$$\rho_p \frac{d^2 \vec{\psi}}{dt^2} = \vec{\text{div}} \sigma \quad [1]$$

avec :

$$\vec{\psi}(z, t) = A(z, t) \vec{e}_r + B(z, t) \vec{e}_z \quad [2]$$

Où : σ est le tenseur des contraintes, $\vec{\psi}$ le vecteur déplacement d'un élément de la paroi.

L'application de la théorie des coques minces en petite déformation permet de faire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, aboutissant à des expressions plus simples (Hsu & Clifton, 1956 ; Moddie & Haddow, 1978 ; Bahrar, 1986) et conduit à admettre que :

- le déplacement d'un point quelconque traduisant la déformation de la conduite est déterminé par celui du point correspondant à la surface médiane ;
- la composante radiale de la contrainte dans une section droite de la conduite est négligeable. En supposant les effets d'inertie de la paroi

négligeables par rapport aux effets élastiques, d'après Patel & Fry (1969), l'équation du mouvement [1] s'écrit dans la base associée aux coordonnées cylindriques:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r+R} = \rho_p \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad [3]$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r+R} = \rho_p \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

avec :

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial B}{\partial z} + \nu \frac{A}{r+R} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{rr}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{A}{r+R} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{rr} \quad [4]$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_{rz} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial A}{\partial z}$$

En multipliant le système des équations [3] par la quantité $\frac{r+R}{R}$ et en l'intégrant de $-h/2$ à $h/2$, (h est l'épaisseur de la conduite).

On obtient le système d'équations suivant :

$$\rho_p h \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \left[\sigma_{rr} \frac{r+R}{R} \right]_{-h/2}^{h/2} + \frac{\partial (h \sigma_{rz})}{\partial z} - \frac{h E}{1-\nu^2} \left(\left(1 + \frac{h^2}{12 R^2} \right) \frac{A}{R^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial B}{\partial z} \right) \quad [5]$$

$$\rho_p h \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{h \sigma_{rz}}{R} + \frac{h E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{A}{R} + \frac{\partial B}{\partial z} \right) - \frac{\nu E A h^3}{12(1-\nu^2) R^4} \frac{\partial R}{\partial z}$$

Au système des équations [5], on ajoute les conditions aux limites correspondant à la surface de séparation fluide-paroi (Flaud *et al.*, 1974; Ly *et al.*, 1981):

$$\left[\sigma_{rr} \frac{r+R}{R} \right]_{r=-h/2}^{r=h/2} = \left[P_t - 2\eta_a \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=R} \quad [6]$$

$$\left[\frac{h \sigma_{rz}}{R} \right]_{r=-h/2}^{r=h/2} = - \left[\eta_a \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]_{r=R}$$

$P_t = P - P_{ext}$ où : P et P_{ext} sont respectivement les pressions à l'intérieur et à l'extérieur du tube.

Les hypothèses de petite déformation et de paroi mince permettent de négliger les termes en $\frac{h^3}{R^4}$ et

le terme $\frac{\partial (h \sigma_{rz})}{\partial z}$ (Morgan & Keilly, 1954; Herrman & Mirsky, 1956; Lin *et al.*, 1956). Le système des équations [5] devient alors :

$$\rho_p h \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \left[P_t - 2\eta_a \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=R} - \frac{h E}{1-\nu^2} \left(\frac{A}{R^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial B}{\partial z} \right) \quad [7]$$

$$\rho_p h \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = - \left[\eta_a \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]_{r=R} + \frac{h E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{A}{R} + \frac{\partial B}{\partial z} \right)$$

Le développement à l'ordre 1 des équations obtenues, suivant les puissances de $\left(\frac{A}{R_0} \ll 1 \right)$ conduit à :

$$\rho_p h \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \left[P_t - 2\eta_a \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=R_0} - \frac{h E}{1-\nu^2} \left(\frac{A}{R_0^2} + \frac{\nu}{R_0} \frac{\partial B}{\partial z} \right) \quad [8]$$

$$\rho_p h \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = - \left[\eta_a \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]_{r=R_0} + \frac{h E}{1-\nu^2} \left(\frac{\nu}{R_0} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right)$$

En macrocirculation, au niveau de chaque artère et veine on assiste à une perte de fluide à travers les embranchements. Cette perte sera représentée par la loi de Starling (Zeggwagh, 1988).

$$V_F = L_p (P(z, t) - P_{ext}) \quad [9]$$

où L_p est le coefficient de filtration.

Le débit de fuite par unité de longueur est alors :

$$q_f = 2\pi R(z, t) V_F \quad [10]$$

Les équations régissant l'écoulement, en l'absence d'efforts volumiques, sont les équations traduisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \text{div } \Sigma \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{V} = 0 \quad [11]$$

avec : $\Sigma = - P \mathbf{1} + 2\eta_a \mathbf{d}$ où Σ est le tenseur des

contraintes, \mathbf{d} le tenseur des taux de déformation, $\mathbf{1}$ le tenseur identité et \vec{V} le champ de vitesses

Les données sont la pression et le débit à l'entrée de la conduite que l'on prend de la forme :

$$P(o, t) = P_o + P_{o1} \sin \omega t$$

$$\text{et } q(o, t) = q_o + q_{o1} \sin \omega t \quad [12]$$

où ω est la pulsation du mouvement du fluide et P_o , P_{o1} , q_o , q_{o1} des constantes connues.

1.2. Adimensionnalisation et simplification des équations

Par souci de simplification d'écriture, les dépendances en temps et en variables spatiales des différentes grandeurs seront délibérément omises.

Dans le but de mettre en évidence des nombres sans dimensions caractéristiques de l'écoulement, et dont l'ordre de grandeur pour l'application envisagée permet de mesurer l'importance relative des différentes contributions, on introduit les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\hat{r} = \frac{r}{R_o}, \hat{z} = \frac{z}{L}, \hat{t} = \frac{t\omega}{2\pi}, \hat{w} = \frac{w}{w_o},$$

$$\hat{u} = \frac{uL}{R_o w_o}, \hat{\eta}_a = \frac{\eta_a}{\eta}, \hat{P} = \frac{PR_o^2}{\eta w_o L} \quad [13]$$

où W_o est une vitesse caractéristique de l'écoulement dans la direction axiale et η une viscosité newtonienne.

Les équations adimensionnelles régissant l'écoulement s'écrivent :

$$\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r} \hat{u}) + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0$$

$$\beta^2 \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + R_e \varepsilon^3 \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} \right) = - \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{r}} +$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z} \partial \hat{r}} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r} \hat{\eta}_a \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}}) \right.$$

$$\left. - 2 \hat{\eta}_a \frac{\hat{u}}{\hat{r}^2} + \varepsilon^2 (\hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} + \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}}) \right) \quad [14]$$

$$\beta^2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + R_e \varepsilon \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) = - \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{z}} + \frac{\hat{\eta}_a}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}}$$

$$+ \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{r}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{r}^2} + \varepsilon^2 \left(\hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{r} \partial \hat{z}} + \frac{\hat{\eta}_a}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{r}} + 2 \frac{\partial}{\partial \hat{z}} (\hat{\eta}_a \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}}) \right)$$

Les nombres sans dimensions [15] qui sont respectivement le nombre de Womersley, le

nombre de Reynolds de l'écoulement et ε un petit paramètre adimensionnel.

$$\beta = R_o \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\pi \eta}}, \quad R_e = \frac{\rho R_o w_o}{\eta} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{R_o}{L} \quad [15]$$

Comme le rapport du rayon de la conduite et de sa longueur est petit dans le domaine de notre étude (Burton, 1972; Caro *et al.*, 1978), on a $\varepsilon^2 \ll 1$. Il est à noter que le produit $R_e \varepsilon$ n'est pas petit devant l'unité (Buthaud, 1977).

Ces considérations permettent alors de simplifier les équations; elles s'écrivent alors [16] :

$$\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r} \hat{u}) + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{r}} = 0$$

$$\beta^2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + R_e \varepsilon \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) = - \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{z}} + \frac{\hat{\eta}_a}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} +$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{r}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{r}^2} \quad [16]$$

1.3. Système des équations locales

En revenant aux variables dimensionnelles, on obtient l'équation [17] et on adopte pour le fluide un comportement de Bingham généralisé (éq. [18]).

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad [17]$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \eta_a \frac{\partial w}{\partial r})$$

$$\eta_a \frac{\partial w}{\partial r} = -\tau_o + K \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial w}{\partial r} \quad \text{pour } \tau > \tau_o$$

$$\text{et } \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } \tau \leq \tau_o \quad [18]$$

où τ_o est la contrainte seuil, K la consistance et n l'indice de comportement du fluide.

Notons que pour des valeurs particulières de τ_o , K et n on peut obtenir différents modèles de fluides (Newton, Ostwald, Bingham ou Casson).

1.4. Changement de variables

En vue de fixer les frontières du domaine d'écoulement et de définir des pas constants dans la direction radiale de la section z considérée, on effectue le changement de variable suivant,

(Buthaud, 1977 ; Rakotomalala, 1989) :

$$X = \frac{r}{R} \quad \text{avec} \quad 0 \leq X \leq 1$$

On introduit alors trois nouvelles fonctions, la vitesse axiale $w^*(x, z, t)$, la vitesse radiale $u^*(x, z, t)$ et la viscosité $\eta_a^*(x, z, t)$ avec :

$$w^*(x, z, t) = w(r, z, t), \quad u^*(x, z, t) = u(r, z, t)$$

$$\text{et} \quad \eta_a^*(x, z, t) = \eta_a(r, z, t)$$

Pour la simplicité des écritures, on note dorénavant les vitesses axiale w , radiale u et la viscosité η_a .

Le système des équations locales s'écrit alors :

*Pour $\tau > \tau_0$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \left\{ \frac{x}{r} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{u}{R} + \frac{1}{\rho R^2} \left(\frac{\eta_a}{x} + \frac{\partial \eta_a}{\partial x} \right) \right\} + \frac{w}{R} \left(\frac{u}{x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\eta_a}{\rho R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$u = \frac{\partial R}{\partial z} \left(xw - \frac{2}{x} \int_0^x yw dy \right) - \frac{R}{x} \int_0^x y \frac{\partial w}{\partial z} dy$$

$$\eta_a \frac{\partial w}{\partial x} = -\tau_0 R + \frac{K}{R^{n-1}} \frac{\partial w}{\partial x} \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^{n-1}$$

* Pour $\tau \leq \tau_0$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$u = -\frac{R x}{2} \frac{\partial w}{\partial z}(x_0, z, t)$$

Les conditions aux limites associées à ce système d'équations sont :

* l'axisymétrie de l'écoulement :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad u = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad [21]$$

* Dans le cas où on assimile la paroi vasculaire à un milieu poreux, les conditions sur la vitesse normale et de non glissement déterminent les composantes de transfert pariétal :

$$u = \frac{\partial A}{\partial t} + L_p(P - P_{\text{ext}}) \quad \text{pour} \quad x = 1$$

$$w = \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial z} L_p(P - P_{\text{ext}}) \quad \text{pour} \quad x = 1 \quad [22]$$

1.5. Système des équations intégrales

Le gradient de pression étant inconnu le long du conduit, le système des équations locales ne peut être résolu séparément, on lui adjoint le système des équations intégrales de l'écoulement. On pose :

$$A = R - R_0, \quad q_1 = 2 \int_0^{x_0} yw dy, \quad q_2 = 2 \int_0^{x_0} yw^2 dy,$$

$$q = q_1 + q_2, \quad q_3 = 2 \int_0^{x_0} y|w| dy, \quad H_1 = \int_0^{x_0} yw^2 dy,$$

$$H_2 = \int_0^{x_0} yw^2 dy, \quad H = H_1 + H_2 = \alpha_1 \frac{q^2}{2} + \alpha_2 \frac{q_3^2}{2}$$

$$\text{avec: } \alpha_1 = \frac{1}{q_3^2} \int_0^{x_0} 2 \int yw^2 dy \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \alpha_1 \left(1 - \frac{q^2}{q_3^2} \right) \quad [23]$$

Le système des équations intégrales s'écrit alors :

* pour $\tau \leq \tau_0$ ($0 \leq x \leq x_0$)

$$u(x, z, t) = -\frac{R}{2} x \frac{\partial w(x_0, z, t)}{\partial z}$$

$$q_1 = x_0^2 w(x_0, z, t)$$

$$H_1 = \frac{x_0^2}{2} w^2(x_0, z, t) \quad [24]$$

* pour $\tau > \tau_0$ ($x_0 < x \leq 1$)

En multipliant le système des équations [19] par x et en l'intégrant de x_0 à 1 (P étant indépendante de x), on obtient :

$$L_p(P - P_{\text{ext}}) + \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{A + R_0}{2} \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial B}{\partial t} - q \right) = 0 \quad [25]$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = -\frac{2}{A + R_0} \frac{\partial A}{\partial t} q - \frac{2}{A + R_0} \frac{\partial B}{\partial t} L_p(P - P_{\text{ext}}) +$$

$$\frac{2}{A + R_0} \frac{\partial A}{\partial z} (L_p(P - P_{\text{ext}}))^2 - \frac{1}{\rho} (1 - x_0^2) \frac{\partial P}{\partial z} +$$

$$\frac{2}{\rho(A + R_0)^2} \left[(\eta_a \frac{\partial w}{\partial x})_{x=1} - x_0 (\eta_a \frac{\partial w}{\partial x})_{x=x_0} \right] - [26]$$

$$\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} q^2 + 2q\alpha_1 \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} q_3^2 + 2q_3\alpha_2 \frac{\partial q_3}{\partial z} \right) -$$

$$\frac{2}{A + R_0} \frac{\partial A}{\partial z} (\alpha_1 q^2 + \alpha_2 q_3^2)$$

2. Schéma de résolution

2.1. Déplacements axial et radial de la paroi

• Détermination des transformées de Carson

En rapportant les grandeurs du problème à leurs valeurs correspondant au régime stationnaire supposé exister pour $t < 0$, le système des équations [8] s'écrit dans l'espace des transformées de Carson sous la forme :

$$\rho_p h s^2 A^*(s, z) = f_1^*(s, z) - \frac{h E}{1 - v^2} \left(\frac{1}{R_o^2} A^*(s, z) + \frac{v}{R_o} \frac{\partial B^*(s, z)}{\partial z} \right) \quad [27]$$

$$\rho_p h s^2 B^*(s, z) = f_2^*(s, z) + \frac{h E}{1 - v^2} \left(\frac{\partial^2 B^*(s, z)}{\partial z^2} + \frac{v}{R_o} \frac{\partial A^*(s, z)}{\partial z} \right) \quad [28]$$

avec :

$$f_1(t, z) = \left(P_t - \frac{2\eta_a}{R_o} \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=1} \quad [29]$$

$$f_2(t, z) = -\left(\eta_a \left(\frac{1}{R_o} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right)_{x=1}$$

où :

$A^*(s, z)$: la transformée de Carson de $A(t, z)$

$B^*(s, z)$: la transformée de Carson de $B(t, z)$

$f_1^*(s, z)$: la transformée de Carson de $f_1(t, z)$

$f_2^*(s, z)$: la transformée de Carson de $f_2(t, z)$

L'équation [28] et l'équation obtenue à partir de la dérivée par rapport à la variable z de l'équation [27] conduisent à :

$$N B^*(s, z) + G \frac{\partial^2 B^*(s, z)}{\partial z^2} = D \quad [30]$$

avec :

$$N = \rho_p h s^2$$

$$G = \frac{h}{1 - v^2} \left(\frac{h E^2 v^2}{R_o^2 (1 - v^2)} \frac{1}{\rho_p h s^2 + \frac{h E}{(1 - v^2) R_o^2}} - E \right)$$

$$D = f_2^*(s, z) + \frac{h E v}{(1 - v^2) R_o} \frac{1}{\rho_p h s^2 + \frac{h E}{(1 - v^2) R_o^2}} \frac{\partial f_1^*(s, z)}{\partial z}$$

L'équation [30] est résolue par une méthode de double balayage (Nougier, 1989).

La détermination de la grandeur $B^*(s, z)$ à partir de l'équation [30] permet, d'une part, la détermination

de $\frac{\partial B^*(s, z)}{\partial z}$ et, d'autre part, la détermination de la grandeur $B^*(s, z)$ à partir de l'équation [31].

$$A^*(s, z) = \frac{1}{\rho_p h s^2 + \frac{h E}{(1 - v^2) R_o^2}} (f_1^*(s, z) - \frac{h v E}{(1 - v^2) R_o} \frac{\partial B^*(s, z)}{\partial z}) \quad [31]$$

• Détermination des déplacements axial et radial de la paroi

Le retour aux originales (fonction de t) des fonctions de s obtenues, qui sont autres que les transformées de Carson des déplacements axial et radial de la paroi, solution cherchée, est réalisé grâce à la méthode d'inversion numérique de Dubner-Abate (Bahrar, 1986 ; Dubner-Abate, 1968).

2.2. Système des équations intégrales discrétisées

Le domaine d'étude est un domaine à deux dimensions (z, t), pourvu d'un maillage à pas constants Δz et Δt définis par :

$$\Delta z = \frac{L}{j_{\max} - 1} \quad \text{et} \quad \Delta t = \frac{2\pi}{\omega(k_{\max} - 1)}$$

k et j sont respectivement les indices de temps et d'espace tels que :

$$t = (k-1) \Delta t \quad \text{avec} \quad 1 \leq k \leq k_{\max}$$

$$\text{et} \quad z = (j-1) \Delta z \quad \text{avec} \quad 1 \leq j \leq j_{\max}$$

On adopte pour la discrétisation des équations du système intégral un schéma aux différences finies centré en espace et retardé en temps (Nougier, 1989).

Les équations, discrétisées au point $M(j, k+1)$ du maillage, conduisent au système d'équations algébrique suivant :

$$P_{j, k+1} = P_{\text{ext}} + \frac{1}{L_p} \left(-\frac{A_{j, k+1} - A_{j, k}}{\Delta t} - \frac{A_{j, k+1} + R_o}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)_{j, k+1} + \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{j, k} \left(\frac{B_{j, k+1} - B_{j, k}}{\Delta t} \right) - q_{j, k+1} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{j, k+1} \right) \quad [32]$$

avec :

$$\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_{j,k+1} = \frac{q_{j+1,k+1} - q_{j-1,k+1}}{2\Delta z}$$

pour $2 \leq j \leq j_{\max} - 1$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_{1,k+1} = \frac{4q_{2,k+1} - q_{3,k+1} - 3q_{1,k+1}}{2\Delta z}$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)_{j_{\max},k+1} = \frac{3q_{j_{\max},k+1} - 4q_{j_{\max}-1,k+1} + q_{j_{\max}-2,k+1}}{2\Delta z}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{j,k+1} = \frac{A_{j+1,k+1} - A_{j-1,k+1}}{2\Delta z}$$

pour $2 \leq j \leq j_{\max} - 1$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{1,k+1} = \frac{4A_{2,k+1} - A_{3,k+1} - 3A_{1,k+1}}{2\Delta z}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_{j_{\max},k+1} = \frac{3A_{j_{\max},k+1} - 4A_{j_{\max}-1,k+1} + A_{j_{\max}-2,k+1}}{2\Delta z}$$

$$q_{2,j,k+1} + \frac{2}{A_{j,k} + R_0} (q_{j,k} A_{j,k+1} + L_p (P_{j,k} - P_{\text{ext}}) B_{j,k+1}) = D_{j,k} \quad [33]$$

avec :

$$D_{j,k} = q_{2,j,k} + \frac{2}{A_{j,k} + R_0} (q_{j,k} A_{j,k} + L_p (P_{j,k} - P_{\text{ext}}) B_{j,k}) - \Delta t \left(\frac{1}{\rho} (1 - x_0^2) \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_{j,k} - \frac{2}{R_0 + A_{j,k}} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{j,k} (L_p (P_{j,k} - P_{\text{ext}}))^2 + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \right)_{j,k} q_{j,k}^2 + 2q_{j,k} \alpha_{1,j,k} \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)_{j,k} + q_{3,j,k}^2 \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \right)_{j,k} + 2q_{3,j,k} \alpha_{2,j,k} \left(\frac{\partial q_3}{\partial z} \right)_{j,k} + \frac{2}{R_0 + A_{j,k}} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{j,k} \alpha_{1,j,k} q_{j,k}^2 + \frac{2}{R_0 + A_{j,k}} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{j,k} \alpha_{2,j,k} q_{3,j,k}^2 - \frac{2}{\rho (R_0 + A_{j,k})^2} \left(\eta_a \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{(x=1),j,k} + \frac{2x_0}{\rho (R_0 + A_{j,k})^2} \left(\eta_a \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{(x=x_0),j,k} \right)$$

[34]

Les données du problème sont exprimées en terme de pression et de vitesse de débit à l'entrée de la conduite :

$$P_{1,k} = P_0 + P_{0,1} \sin \omega(k-1)\Delta t$$

$$q_{1,k} = q_0 + q_{0,1} \sin \omega(k-1)\Delta t \quad [35]$$

2.3. Système des équations locales discrétisées

Ces équations locales sont aussi discrétisées suivant un schéma implicite retardé en temps. On obtient alors les équations algébriques suivantes :

* pour $\tau > \tau_0 \quad (x_0 < x \leq l)$

$$Aw_{i,j,k+1} + Bw_{i+1,j,k+1} + Cw_{i-1,j,k+1} = D \quad [36]$$

$$u_{i,j,k+1} = -\frac{R_0 + A_{j,k+1}}{(i-1)\Delta x} C_{2i,j,k+1} + \frac{A_{j+1,k+1} - A_{j-1,k+1}}{2\Delta x} ((i-1)\Delta x w_{i,j,k+1} + \frac{2}{\Delta x(i-1)} C_{1i,j,k+1})$$

où $C_1 = \int_{x_0}^x y w dy$ et $C_2 = \int_{x_0}^x y \frac{\partial w}{\partial z} dy$

avec :

$$A = 1 + \Delta t \left(\frac{2}{(\Delta x)^2} \left(\frac{K}{\rho (R_0 + A_{j,k+1})^{n+1}} f_{i,j,k+1} - \frac{1}{R_0 + A_{j,k+1}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j,k+1} - \frac{u_{i,j,k+1}}{\Delta x(i-1)(R_0 + A_{j,k+1})} \right) \right)$$

$$B = -\Delta t \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} \left(\frac{K}{\rho (R_0 + A_{j,k+1})^{n+1}} f_{i,j,k+1} + \frac{1}{2\Delta x} \left(-\frac{u_{i,j,k+1}}{R_0 + A_{j,k+1}} + \frac{K}{\rho \Delta x (i-1) (R_0 + A_{j,k+1})^{n+1}} f_{i,j,k+1} + \frac{K}{\rho (R_0 + A_{j,k+1})^{n+1}} \frac{f_{i+1,j,k+1} - f_{i-1,j,k+1}}{2\Delta x} \right) \right) \right)$$

* pour $\tau \leq \tau_0 \quad (0 \leq x \leq x_0)$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i,j,k+1} = 0 \quad [38]$$

$$C = -\Delta t \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} \left(\frac{K}{\rho(R_o + A_{j,k+1})^{n+1}} f_{i,j,k+1} \right) - \frac{1}{2\Delta x} \left(-\frac{u_{i,j,k+1}}{R_o + A_{j,k+1}} + \frac{K}{\rho \Delta x (i-1)(R_o + A_{j,k+1})^{n+1}} f_{i,j,k+1} + \frac{K}{\rho(R_o + A_{j,k+1})^{n+1}} \frac{f_{i+1,j,k+1} - f_{i-1,j,k+1}}{2\Delta x} \right) \right)$$

$$D = w_{i,j,k} - \Delta t \left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_{j,k+1} + \frac{\tau_o}{\rho \Delta x (i-1)(R_o + A_{j,k+1})} \right) + \frac{(i-1)}{R_o + A_{j,k}} \frac{w_{i+1,j,k} - w_{i-1,j,k}}{2} (A_{j,k+1} - A_{j,k})$$

$$f = \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^{n-1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j,k+1} = \frac{u_{i+1,j,k+1} - u_{i-1,j,k+1}}{2\Delta x}$$

pour $2 \leq i \leq i_{\max} - 1$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{1,j,k+1} = \frac{u_{2,j,k+1} - u_{1,j,k+1}}{\Delta x}$$

$u_{i_{\max},j,k+1}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i_{\max},j,k+1} = \frac{u_{i_{\max}-1,j,k+1}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,j,k+1} = \frac{w_{i,j+1,k+1} - w_{i,j-1,k+1}}{2\Delta z}$$

pour $2 \leq j \leq j_{\max} - 1$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,1,k+1} = \frac{w_{i,2,k+1} - w_{i,1,k+1}}{\Delta z}$$

$w_{i,j_{\max},k+1}$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,j_{\max},k+1} = \frac{w_{i,j_{\max}-1,k+1}}{\Delta z}$$

$$u_{i,j,k+1} = -\frac{\Delta x (i-1)(A_{j,k+1} + R_o)}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{x_o,j,k+1} \quad [39]$$

L'équation [36] est résolue par la méthode de double balayage (Nougier, 1989), en tenant compte des conditions aux limites ci-après :

- L'axisymétrie de l'écoulement :

$$w(1,j,k+1) = \frac{4w_{2,j,k+1} - w_{3,j,k+1}}{3} \quad [40]$$

$$u(1,j,k+1) = 0$$

- Sur la paroi de la conduite :

$$w(i_{\max},j,k+1) = \frac{B_{j,k+1} - B_{j,k}}{\Delta t} L_p (P_{j,k+1} - P_{\text{ext}}) \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{j,k+1} \quad [41]$$

$$u(i_{\max},j,k+1) = \frac{A_{j,k+1} - A_{j,k}}{\Delta t} L_p (P_{j,k+1} - P_{\text{ext}})$$

2.4. Profil initial

Le profil initial peut être absolument quelconque, pourvu qu'il satisfasse aux conditions aux limites. Toutefois, pour réduire le temps de calcul, on choisit un profil initial qui soit assez proche du profil réel. On prendra dans ce but le profil correspondant à un écoulement permanent de fluide Newtonien en conduite cylindrique poreuse (Zeggwagh, 1988).

2.5. Tests de convergence

Les critères de convergence et de périodicité de la solution portent sur la pression. Si m est le nombre de cycles de calcul et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux quantités petites fixées à l'avance, on impose :

$$\text{Sup} \left| \frac{P_m(z,t) - P_{m+1}(z,t)}{P_m(z,t)} \right| < \varepsilon_1$$

et

$$\text{Sup} \left| \frac{P_m(z,t) - P_m(z,t+T)}{P_m(z,t+T)} \right| < \varepsilon_2$$

2.6. Données

Les données du programme prises dans la littérature (Caro *et al.*, 1978 ; Flaud, 1979 ; Hadsadok *et al.*, 1993) sont relatives aux conditions hydrodynamiques et aux paramètres caractérisant le comportement rhéologique du fluide et de la conduite.

La masse volumique du fluide considéré, ρ , est égale à 1 gcm^{-3} ; sa consistance, K , est égale à 0.07 C.G.S ; son indice de comportement, n , est égale à 0.5 ; la contrainte seuil, τ_o , est égale à $0.04 \text{ dyne cm}^{-2}$; la longueur de la conduite, L , est égale à 21 cm et son rayon au repos, R_o , 0.8 cm ; le coefficient de filtration, L_p , vaut $1.6 \cdot 10^{-6} \text{ scm}^2 \text{ g}^{-1}$; la masse volumique de la paroi, ρ_p , est égale à 7.8 gcm^{-3} ; son épaisseur, h , vaut 0.04 cm ; le module d'Young, E ,

$4.10^6 \text{ dynecm}^{-2}$; le coefficient de Poisson, n , vaut 0.5, les composantes permanente, P_0 , et oscillatoire, P_{01} , valent respectivement 5320 dynecm^{-2} et 532 dynecm^{-2} ; les composantes permanente, q_0 , et oscillatoire q_{01} , valent respectivement 40.96 cms^{-1} et 4.096 cms^{-1} ; la période du mouvement, T , est égale à 1 s.

2.6. Processus de résolution

Les calculs sont amorcés avec les valeurs de f_1 et f_2 issues du profil initial. La résolution du système intégral et l'utilisation de la loi du tube permettent d'avoir, en toute section et à chaque instant, la valeur du gradient de pression. À partir de la solution des équations locales les grandeurs f_1 et f_2 sont réestimées, leurs valeurs corrigées permettent de réitérer et ce jusqu'à convergence de la solution.

RESULTATS

On considère dans cette étude le cas où l'onde de pression ne subit pas de réflexion et se trouve totalement amortie à l'infini aval. On analyse à la fois l'influence des paramètres rhéologiques du fluide, indice de comportement n et la contrainte seuil et ceux de la paroi, isotropie et coefficient de porosité L_p , sur la distribution des pressions et des vitesses de débit. Cette analyse est faite en la section $z=L/2$.

On constate, sur la figure 2, qu'une augmentation de l'indice de comportement qui entraîne une augmentation de la viscosité apparente se traduit par une augmentation des valeurs de la pression. L'écart entre les deux courbes reste pratiquement inchangé avec un léger espacement respectivement aux valeurs maximales et minimales de la pression.

Sur la figure 3, on remarque qu'une diminution de n , qui se traduit par une pseudoplasticité plus marquée, s'accompagne d'une diminution de la viscosité apparente qui entraîne donc une augmentation des valeurs de la vitesse de débit.

Les figures 4 et 5 illustrent l'évolution des pressions et des vitesses de débit au cours du temps pour deux valeurs de la contrainte seuil: $\tau_0 = 0.04$ et $\tau_0 = 0$.

On constate, sur la figure 4, qu'une augmentation de la contrainte seuil entraînant une augmentation de la viscosité apparente se traduit par une augmentation des valeurs de la pression.

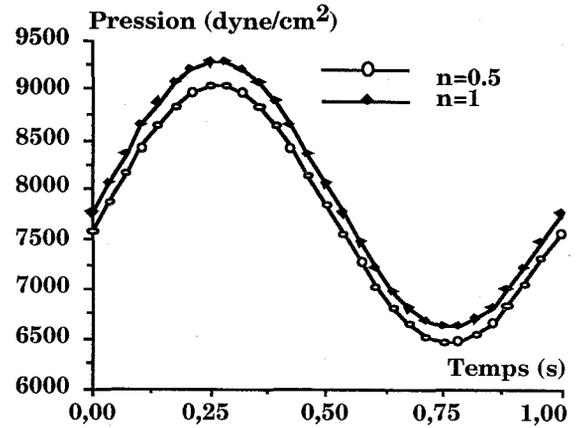


Figure 2. Évolution de la pression en $z=L/2$ pour 2 valeurs de l'indice de comportement n

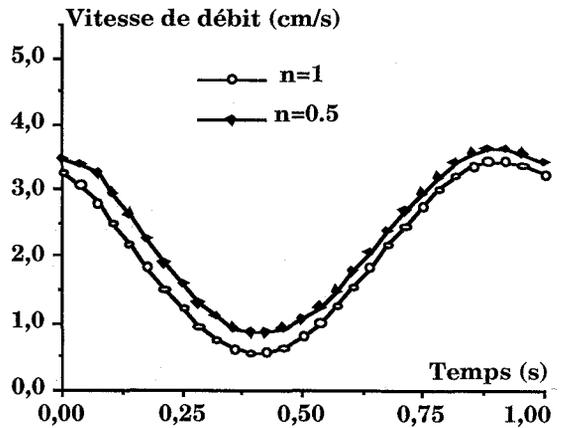


Figure 3. Évolution de la vitesse de débit en $z=L/2$ pour 2 valeurs de l'indice de comportement n

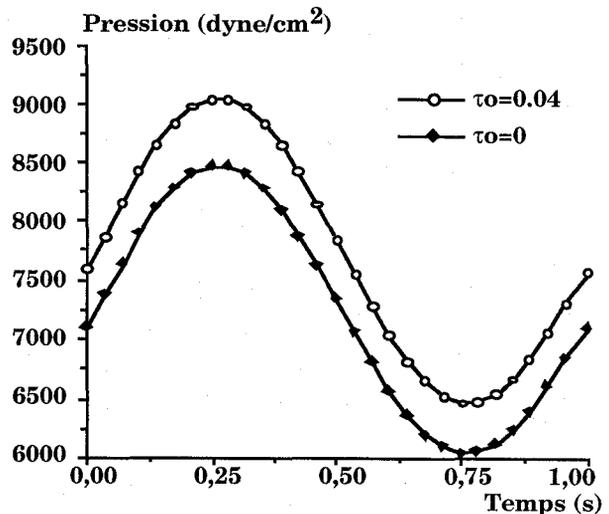


Figure 4. Évolution de la pression en $z=L/2$ pour 2 valeurs de la contrainte seuil τ_0

La figure 5 illustre l'influence de la contrainte seuil sur la vitesse de débit. Comme on peut le prévoir, une diminution de la contrainte seuil, qui entraîne une diminution des frottements internes entre les diverses couches coaxiales du fluide, se traduit par une augmentation des valeurs de la vitesse de débit.

Sur la figure 6, on a porté l'évolution de la distribution des pressions pour deux valeurs différentes du coefficient de porosité $L_p=1.6 \text{ E-}8$ et $L_p=1.6\text{E-}6(\text{cm}^2\text{sg}^{-1})$. On constate qu'une diminution de L_p provoque une augmentation des valeurs de la pression. Toutefois, cette augmentation est faible, ceci est sans doute dû aux faibles valeurs de L_p . On obtient des résultats qualitativement semblables à ceux obtenus par d'autres auteurs (Salathe & Ank, 1976 ; Zeggwagh, 1988 ; Hammoumi *et al.*, 1993).

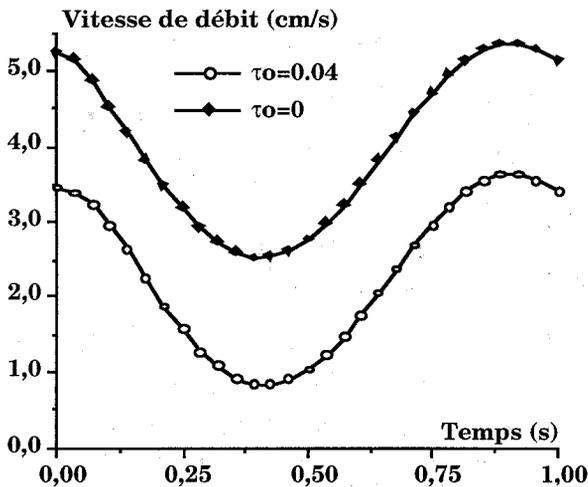


Figure 5. Évolution de la vitesse de débit en $z=L/2$ pour 2 valeurs de la contrainte seuil τ_0

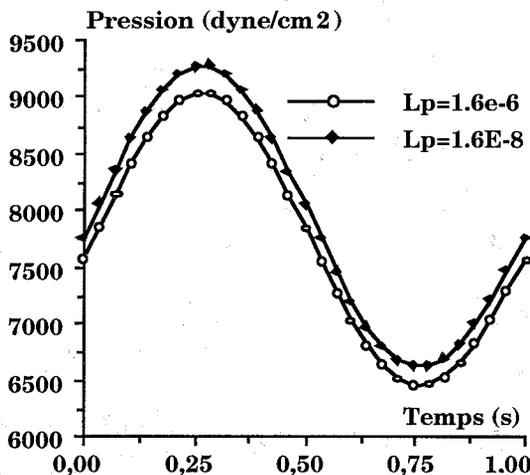


Figure 6. Évolution de la pression en $z=L/2$ pour 2 valeurs du coefficient de filtration L_p

Une diminution du coefficient de filtration entraîne une augmentation des valeurs de la vitesse de débit (Figure 7).

La comparaison des figures 6 et 7 montre, qu'à un maximum, respectivement un minimum, de la pression correspond un minimum, respectivement un maximum, de la vitesse de débit.

La prise en considération de déplacement axial de la paroi entraîne l'augmentation des valeurs de la pression (Figure 8). Il est à noter que l'écart entre les deux courbes augmente de $t=0$ à $t=T/4$ puis diminue jusqu'à $t=3T/4$ où il recommence à croître jusqu'à $t=T$.

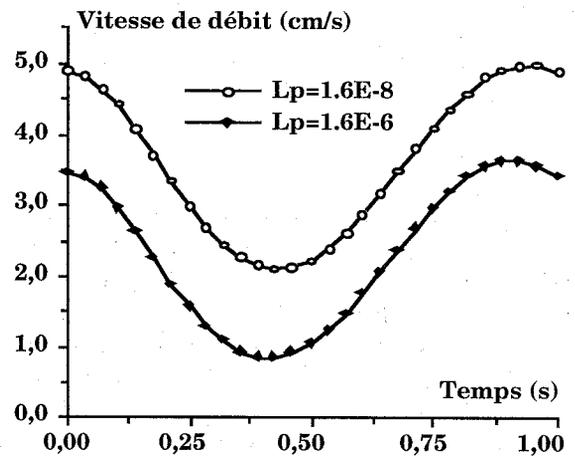


Figure 7. Évolution de la vitesse de débit en $z=L/2$ pour 2 valeurs du coefficient de filtration L_p

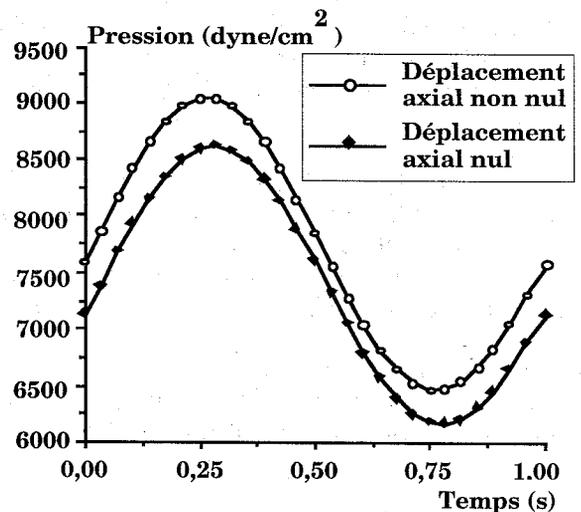


Figure 8. Évolution de la pression en $z=L/2$ pour le cas d'un déplacement axial de la paroi non nul et le cas nul

Comme le montre la figure 9, la vitesse de débit, pour le cas d'un déplacement axial de la paroi non nul et le cas nul, diminue avec la prise en compte de déplacement axial.

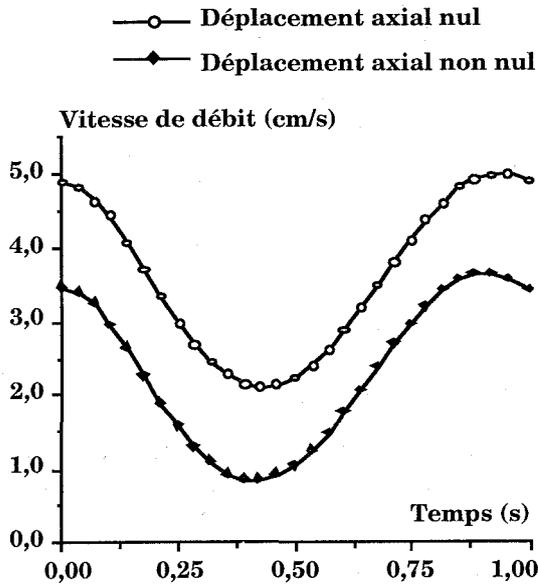


Figure 9. Évolution de la vitesse de débit en $z=L/2$ pour le cas d'un déplacement axial de la paroi non nul et le cas nul

La comparaison de ces deux dernières figures avec les figures 4 et 5 laisse penser que l'influence de déplacement axial de la paroi peut être liée directement à la viscosité apparente du fluide (une prise en considération de celui-ci entraîne une augmentation de la viscosité apparente).

CONCLUSION

Les écoulements non permanents et bidimensionnels de fluides plastiques, dont les équations sont le siège de non linéarité dues aux termes convectifs de l'accélération et du modèle rhéologique du fluide, ont été abordés sous un aspect assez général. Ceci nous a permis d'analyser l'influence et l'évolution des phénomènes liés à l'indice de comportement n du fluide, à la contrainte seuil τ_0 , au coefficient de filtration L_p et à l'élasticité de la paroi.

Les résultats obtenus montrent l'intérêt de tenir compte de la nature de la paroi artérielle (élastique, imperméable ou poreuse) et de la nature du fluide (fluide non newtonien plastique). Ces résultats devraient contribuer à une meilleure connaissance des processus intervenant dans la circulation sanguine et, par conséquent, à des applications faites en hémodynamique.

RÉFÉRENCES CITÉES

- Burton A.C. (1972) Physiologie et biophysique de la circulation. Masson, Paris
- Bellet D. (1973) Relations entre comportements rhéologiques pseudoplastiques et échanges thermiques. Thèse de Doctorat ès-Sciences, U.P.S., Toulouse
- Buthaud H. (1977) Analyse non linéaire et bidimensionnelle de l'écoulement sanguin dans un modèle de l'aorte. Thèse de Docteur-ingénieur, Poitiers
- Quemada D. (1978) Rheology of concentrated disperse systems. 3- General features of the proposed non newtonian model. Comparison with experimental data. *Rheol Acta* 17, pp. 643-653
- Caro C.G., Pedley T.J., Schroter R.C. & Seed W.A. (1978) The mechanics of the circulation. Oxford University Press
- Flaud P. (1979) Influence des propriétés non linéaires sur la dynamique des écoulements dans un tuyau déformable. Thèse de Doctorat ès Sciences, Paris VII
- Ly D.P., Bellet D., Bousquet A. & Boyer P. (1981) Ecoulements pulsés de fluides inélastiques en conduites tronconique ou déformable. *Revue de Physique Appliquée* 16 : 323-331
- Theodorou G. (1983) Ecoulements non permanents de fluides non newtoniens dans un rétrécissement de la section. Thèse de Docteur-ingénieur, I.N.P., Toulouse
- Bitoun J.P. (1985) Etudes théorique et expérimentale de la microcirculation sanguine au passage d'une sténose. Thèse de Doctorat de l'I.N.P., Toulouse
- Bahrar B. (1986) Influence, sur les écoulements transitoires en conduite, des termes d'inertie de la paroi, ainsi que des déformations de flexion et de cisaillement. Thèse de Doctorat de 3^e cycle, I.N.S.A., Lyon
- Zeggwagh G. (1988) Modélisations théoriques et expérimentales de l'hémodynamique en microcirculation. Thèse de Doctorat ès Sciences, I.N.P., Toulouse
- Nougier J.P. (1989) Méthodes de calcul numérique. 3^e édition, Masson, Paris
- Rakotomalala A.R. (1989) Ecoulements non newtoniens en conduites rigides et déformables. Thèse de Doctorat ès Sciences, I.N.P., Toulouse

- Rakotomalala A.R. & Bellet D. (1991) Ecoulements transitoires et périodiques de fluides non newtoniens en conduites tronconiques. *Journal de Physique* 1 : 87-102
- Hammoumi A., Kerroum M., Gueraoui K. & Zeggwagh G. (1993) Modélisation théorique d'écoulements non permanents de fluides à comportement Newtonien en conduites poreuses à paroi viscoélastique. Application à la circulation sanguine. *Actes Inst. Agron. Vet. (Maroc)* 13 (2) : 41-50
- Kerroum M. (1994) Ecoulements pulsés de fluides diphasiques en conduites déformables de faibles diamètres. Modélisation de la microcirculation sanguine. Thèse de Doctorat ès-Sciences, Rabat
- Casson N. (1959) A flow equation for pigment oil suspensions of printing ink type. In : *Rheology of disperse systems* Ed. Mill C. C., Pergamon London, pp. 84-102
- Dubner-Abate J. (1968) Numerical inversion of Laplace transformation by relating then to the finite Fourier cosine transform. *J.A.C.N.* (15) 1 : 115-123
- Flaud P., Geiger D., Oddou C. & Quemada D. (1974) Ecoulements pulsés dans les tuyaux viscoélastiques. Application à l'étude de la circulation sanguine. *J. Physique Appliqué* 35 : 869-882
- Hadjsadok A., Benhadid S., Wang X., Lucius M. & Soltz J.F. (1993) Viscosimètre de Couette: détermination du taux de cisaillement à partir des modèles de Casson et Casson généralisé, 1^{er} congrès de Mécanique, E.N.I.M Rabat. *Soc. Mar. des Sciences Mec.* , pp. 309-317
- Herrman G. & Mirsky I. (1956) Three-dimensional and shell-theory analysis of axially symmetric motions of cylinders. *J. Appl. Mech.* 23 : 563-568
- Hsu J.C. & Clifton R.J. (1956) Wave in a thin-walled tube due to sudden release of radial ring pressure. *J. Acous. Soc. Amer.* 23 : 563-568
- Lin T.C. & Morgan G.W. (1956) Wave propagation through fluid contained in a cylindrical elastic shell. *J. Acous. Soc. Amer.* 28 : 1165-1196
- Moddie T.B. & Haddow J.B. (1978) Dispersive effects in wave propagation in thin-walled elastic tubes *J. Acous, Soc. Amer.* 64: 522-528
- Morgan G.W. & Keily J.P. (1954) Wave propagation in a viscous liquid contained in a flexible tube. *J. Acous. Soc. Amer.* 26 : 323-328
- Patel D.J. & Fry D.L. (1969) The elastic symmetry of arterial segments in dogs. *Circulation Research* 21:1-8
- Gueraoui K., Hammoumi A., Kerroum M., Zeggwagh G. & Mrabti A. (1995) Ecoulements non permanents de fluides plastiques en conduites élastiques poreuses. *Actes Inst. Agron. Vet. (Maroc)* 15(2) : 39-49
- Salathe E.P. & Ank N. (1976) A mathematical analysis of fluid movement across capillary walls. *Microvascular Res.* 11 :1-23