

Écoulements non permanents de fluides plastiques en conduites élastiques poreuses

Kamal GUERAOUI*, Abdallah HAMMOUMI*[✧], Mohamed KERROUM*,
Gamal ZEGGWAGH* & Abderrahim MRABTI*

(Reçu le 21/07/1994 ; Accepté le 19/12/1994)

جريان نبضي لسوائل غير نيوتونية داخل قنوات مرنة ذات بطانة مثقبة

الهدف من هذه الدراسة هو إيجاد حل عددي لجريان نبضي للسوائل الغير النيوتونية داخل قنوات مرنة و مثقبة. حدد توزيع سرعتي السائل على التوالي على محور و على شعاع القناة. هذه المساهمة تهدف إلى فهم بعض العوامل المؤثرة على جريان الدم في الشرايين و الأوردة.

الكلمات المفتاحية : جريان نبضي - سائل غير نيوتوني - قناة مرنة - بطانة مثقبة

Écoulements non permanents de fluides plastiques en conduites élastiques poreuses

L'objectif du présent travail est la résolution numérique d'écoulements pulsés de fluides plastiques en conduites à paroi élastique poreuse. À l'aide d'une méthode numérique itérative aux différences finies, nous déterminons les profils des vitesses axiale et radiale. Cette étude dont l'objectif est d'apporter une meilleure connaissance de certains aspects des écoulements sanguins, peut aussi s'appliquer à des écoulements de type industriel .

Mots clés : Écoulement pulsé - Fluide plastique - Conduite élastique - Paroi poreuse - Écoulement sanguin

Pulsatile flow of plastic fluids through porous elastic pipes

A numerical resolution concerning pulsatile flows of plastic fluids through porous elastic ducts is presented. The objective is to investigate the effects of porosity, and elasticity of pipe wall material for a generalized Bingham fluid. An implicit difference method is used to resolve the equations, we determine the axial and radial velocities profiles. This study, considered as a step in modelling of flow in blood vessels, may also contribute to other important fields such as water desalination or gel filtration.

Key words : Pulsatile flow - Generalized Bingham fluid - Porous elastic pipe - Numerical resolution - Hemodynamics

* Groupe de Mécanique des Fluides et des Structures, Laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences de Rabat, Maroc

✧ Auteur correspondant

INTRODUCTION

Une modélisation fine des écoulements réels, bien que tenant souvent compte d'hypothèses simplificatrices, aboutit à des équations très complexes. Ces complexités proviennent essentiellement des conditions géométriques qui limitent l'écoulement (Ly *et al.*, 1981; Theodorou, 1983 ; Bitoun, 1985 ; Zeggwagh, 1988 ; Rakotomalala & Bellet, 1991), de la loi de comportement rhéologique du fluide adoptée pour sa modélisation (Bellet, 1973 ; Quemada, 1978 ; Zagzoule, 1987), du caractère des différentes grandeurs hydrodynamiques (Bahrar, 1986 ; Rakotomalala, 1989), et enfin de l'aspect multiphasique de l'écoulement (Dufaux, 1982 ; Zeggwagh, 1988).

La grande majorité des travaux relatifs aux écoulements de fluides en conduites souples a pour objectif la modélisation de l'écoulement sanguin en différents sites du réseau vasculaire. Ces différentes études sont souvent classées en deux catégories :

- les théories linéaires où les termes convectifs de l'équation du mouvement sont en général négligés, moyennant certaines hypothèses telles que celles de grande longueur d'onde (Womersley, 1958 ; Ly *et al.*, 1981) ou de faibles déformations radiales (Womersley, 1958 ; Flaud, 1979) ;
- les théories non linéaires, évidemment moins restrictives que les précédentes, où les termes convectifs sont pris en considération, ont généralement recours aux méthodes numériques, (Buthaud, 1977 ; Rakotomalala, 1989; Hammoumi *et al.*, 1993) ou aux méthodes des perturbations, (Ly *et al.*, 1981 ; Bitoun, 1985 ; Kerroum, 1994).

On peut aussi subdiviser ces études en analyses unidimensionnelles (Lambossy, 1950, 1951 ; Rockwell, 1976 ; Bretteville *et al.*, 1987) et bidimensionnelles (Womersley, 1958 ; Buthaud, 1977 ; Rakotomalala, 1989). Il est à noter que les études unidimensionnelles ont permis d'expliquer certains phénomènes réels concernant la propagation d'ondes (augmentation du pic de pression dans le cas de l'écoulement de sang dans l'aorte) (Flaud, 1979 ; Bretteville *et al.*, 1987).

L'objectif du présent travail consiste à modéliser des écoulements sanguins grâce à l'étude d'écoulements non permanents de fluides à comportement plastique (fluide de Bingham

généralisé) en conduite poreuse à paroi élastique. Cette approche, qui ne concerne que la modélisation d'écoulements sanguins au niveau de la grande et de la petite circulation, s'effectue par voie théorique.

Les phénomènes qu'on a analysé sont relatifs à des régimes périodiques, les développements numériques permettent d'étudier entre autres l'effet des paramètres rhéologiques du fluide et de la paroi sur l'ensemble de l'écoulement. Pour illustrer ces effets, l'évolution des profils de vitesses axiale et radiale est présentée.

MÉTHODES

• Modèle théorique

1. Géométrie et équations

On considère l'écoulement pulsé d'un fluide de Bingham généralisé, de masse volumique ρ et de viscosité apparente η_a . En chaque point $M(r, z)$ de la conduite considérée, les vitesses axiale et radiale sont $w(r, z, t)$ et $u(r, z, t)$ (Figure 1).

La conduite considérée est un tube axisymétrique souple, poreux, de longueur L , d'axe OZ et de rayon R_0 au repos.

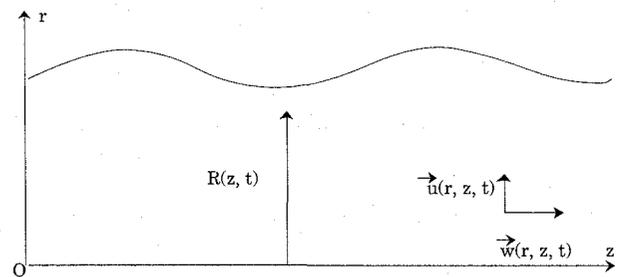


Figure 1. Schéma de la conduite

Le comportement rhéologique de cette conduite, supposée mince, anisotrope, est décrit à tout instant et en chaque section z par la relation de Flaud (1979) ci-après :

$$R(z, t) - R_0 = \alpha (P(z, t) - P_{ext}) \quad [1]$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{(1-\nu^2)R_0^2}{hE}$$

où E est le module de Young du matériau considéré, R le rayon de la conduite, h l'épaisseur

de la paroi, ν le coefficient de Poisson, $P(z,t)$ et P_{ext} les pressions à l'intérieur et à l'extérieur du tube, cette dernière est supposée constante.

En macrocirculation, au niveau de chaque artère et veine, on assiste à une perte de fluide à travers les embranchements. On suppose que cette perte de fluide est régie par la loi de Starling (1894).

$$V_F = L_p \left(P(z,t) - P_{ext} \right) \quad [2]$$

où L_p est le coefficient de filtration .

Le débit de fuite par unité de longueur est

$$\text{alors : } q_f = 2\pi R(z,t) V_F \quad [3]$$

Les équations régissant l'écoulement, en l'absence d'efforts volumiques, sont les équations traduisant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement .

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\text{div}} \Sigma \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{V} = 0 \quad [4]$$

avec $\Sigma = -P1 + 2\eta_a d$ où \vec{V} est le champ de vitesses, Σ le tenseur des contraintes, 1 le tenseur identité et d le tenseur des taux de déformations.

Les données du problème sont exprimées en termes de pression et de vitesse de débit à l'entrée de la conduite et sont présentées sous la forme :

$$P(o,t) = P_o + P_{o1} \sin \omega t \quad \text{et} \quad q(o,t) = q_o + q_{o1} \sin \omega t \quad [5]$$

où ω est la pulsation du mouvement du fluide et P_o, P_{o1}, q_o, q_{o1} des constantes connues .

2. Adimensionnalisation et simplification des équations

Par souci de simplification d'écriture, les dépendances en temps et en variables spatiales des différentes grandeurs seront délibérément omises .

Dans le but de mettre en évidence des nombres sans dimension caractéristiques de l'écoulement et dont l'ordre de grandeur pour l'application envisagée permet de mesurer l'importance relative des différentes contributions, on introduit les grandeurs

$$\hat{r} = \frac{r}{R_0}, \hat{z} = \frac{z}{L}, \hat{t} = \frac{t\omega}{2\pi}, \hat{w} = \frac{w}{w_0}, \hat{u} = \frac{uL}{R_0 w_0}, \hat{\eta}_a = \frac{\eta_a}{\eta}, \hat{P} = \frac{PR_0^2}{\eta w_0 L} \quad [6]$$

adimensionnelles (équation [6]) où w_0 est une vitesse caractéristique de l'écoulement dans la direction axiale et η une viscosité newtonienne.

Les équations adimensionnelles régissant l'écoulement s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r} \hat{u}) + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} &= 0 \\ \beta^2 \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + R_e \varepsilon^3 \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} \right) &= -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{r}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{z} \partial \hat{r}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r} \hat{\eta}_a \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}}) - 2\hat{\eta}_a \frac{\hat{u}}{\hat{r}^2} + \varepsilon^2 (\hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{z}^2} + \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}}) \right) \\ \beta^2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + R_e \varepsilon \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) &= -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{z}} + \frac{\hat{\eta}_a}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{r}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{r}^2} + \varepsilon^2 \left(\hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{r} \partial \hat{z}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\hat{\eta}_a}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{r}} + 2 \frac{\partial}{\partial \hat{z}} (\hat{\eta}_a \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}}) \right) \end{aligned} \quad [7]$$

S'introduisent les nombres sans dimensions suivants :

$$\beta = R_0 \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\pi \eta}}, \quad R_e = \frac{\rho R_0 w_0}{\eta} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{R_0}{L} \quad [8]$$

qui sont respectivement le nombre de Womersley, le nombre de Reynolds de l'écoulement et ε un petit paramètre adimensionnel.

Comme le rapport du rayon de la conduite et de sa longueur est petit dans le domaine de notre étude (Burton, 1972 ; Caro *et al.*, 1978), on a $\varepsilon^2 \ll 1$. Il est à noter que le produit $R_e \varepsilon$ n'est pas petit devant l'unité (Buthaud, 1977). Ces considérations nous permettent alors de simplifier nos équations qui s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r} \hat{u}) + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} &= 0 \\ \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{r}} &= 0 \\ \beta^2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}} + R_e \varepsilon \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} \right) &= -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{z}} + \frac{\hat{\eta}_a}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{r}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{r}^2} \end{aligned} \quad [9]$$

3. Système des équations locales

En revenant aux variables dimensionnelles, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta_a \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad [10]$$

On adopte pour le fluide un comportement de Bingham généralisé.

$$\eta_a \frac{\partial w}{\partial r} = -\tau_0 + K \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^{n-1} \quad \text{pour } \tau > \tau_0$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } \tau \leq \tau_0$$
[11]

τ_0 est la contrainte seuil, K la consistance et n l'indice de comportement du fluide.

Noter que pour des valeurs particulières de τ_0 , K et n, on peut obtenir différents modèles de fluides (Newton, Ostwald, Bingham ou Casson).

4. Changement de variables

En vue de fixer les frontières du domaine d'écoulement et de définir des pas constants dans la direction radiale de la section z considérée, on effectue le changement de variable suivant (Buthaud, 1977 ; Rakotomalala, 1989) :

$$X = \frac{r}{R} \quad \text{avec} \quad 0 \leq X \leq 1$$

On introduit alors trois nouvelles fonctions, la vitesse axiale $w^*(x, z, t)$, la vitesse radiale $u^*(x, z, t)$ et la viscosité $\eta_a^*(x, z, t)$ avec :

$$w^*(x, z, t) = w(r, z, t), \quad u^*(x, z, t) = u(r, z, t) \quad \text{et} \quad \eta_a^*(x, z, t) = \eta_a(r, z, t)$$

Pour la simplicité des écritures, on note dorénavant les vitesses axiale w, radiale u et la viscosité η_a .

Le système des équations locales s'écrit alors :

*Pour $\tau > \tau_0$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{x}{R} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{u}{R} + \frac{1}{\rho R^2} \left[\frac{\eta_a}{x} + \frac{\partial \eta_a}{\partial x} \right] \right)$$

$$\frac{w}{R} \left(\frac{u}{x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\eta_a}{\rho R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$$
[12]

$$u = \frac{\partial R}{\partial z} \left(xw - \frac{2}{x} \int_{x_0}^x y w dy \right) - \frac{R}{x} \int_{x_0}^x y \frac{\partial w}{\partial z} dy$$

$$\eta_a \frac{\partial w}{\partial x} = -\tau_0 R + \frac{K}{R^{n-1}} \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^{n-1}$$

*Pour $\tau \leq \tau_0$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$u = -\frac{Rx}{2} \frac{\partial w}{\partial z}(x_0, z, t)$$
[13]

Les conditions aux limites associées à ce système d'équations sont :

* L'axisymétrie de l'écoulement :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad u = 0 \quad \text{pour } x = 0$$
[14]

* Les conditions sur la paroi de la conduite :

Dans le cas où on assimile la paroi vasculaire à un milieu poreux, les conditions sur la vitesse normale et de non glissement déterminent les composantes de transfert pariétal :

$$w = -L_p(P - P_{ext}) \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{pour } x = 1$$

$$u = L_p(P - P_{ext}) + \frac{\partial R}{\partial t} \quad \text{pour } x = 1$$
[15]

5. Système des équations intégrales

Le gradient de pression étant inconnu le long du conduit, le système des équations locales ne peut être résolu séparément, on lui adjoint le système des équations intégrales de l'écoulement :

On pose :

$$A = R - R_0, \quad q_1 = 2 \int_0^{x_0} y w dy, \quad q_2 = 2 \int_{x_0}^1 y w dy,$$

$$q = q_1 + q_2, \quad q_3 = 2 \int_0^1 y |w| dy,$$

$$H_1 = \int_0^{x_0} y w^2 dy, \quad H_2 = \int_{x_0}^1 y w^2 dy,$$
[16]

$$H = H_1 + H_2 = \alpha_1 \frac{q^2}{2} + \alpha_2 \frac{q_3^2}{2}$$

$$\text{avec : } \alpha_1 = \frac{0}{2} \int_0^1 y w^2 dy \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \alpha_1 \left(1 - \frac{q^2}{q_3^2} \right)$$

Le système des équations intégrales s'écrit alors :

* pour $\tau \leq \tau_0$ ($0 \leq x \leq x_0$) [17]

$$q_1 = x_0^2 w(x_0, z, t)$$

* pour $\tau > \tau_0$ ($x_0 < x \leq 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} = & -A \left(\frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{\alpha} L_p \right) - \frac{\partial A}{\partial z} q - \frac{R_0}{2} \frac{\partial q}{\partial z} \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} = & \frac{-2}{A+R_0} \frac{\partial A}{\partial t} q + \frac{2}{A+R_0} \frac{\partial A}{\partial z} (L_p \frac{A}{\alpha})^2 - \frac{1}{\rho \alpha} (1-x_0^2) \frac{\partial A}{\partial z} \\ & + \frac{2}{\rho(R_0+A)^2} \left((\eta_a \frac{\partial w}{\partial x})_{x=1} - x_0 (\eta_a \frac{\partial w}{\partial x})_{x=x_0} \right) \\ & - (2\alpha_1 q \frac{\partial q}{\partial z} + q^2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} + 2\alpha_2 q_3 \frac{\partial q_3}{\partial z} + q_3^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial z}) \\ & - \left(\frac{2\alpha_1}{A+R_0} q^2 \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{2\alpha_2}{A+R_0} q_3^2 \frac{\partial A}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad [18]$$

• Schéma de résolution

1. Système des équations intégrales discrétisées

Le domaine d'étude est un domaine à deux dimensions (z,t), pourvu d'un maillage à pas constants défini par: $\Delta z = \frac{L}{j_{\max} - 1}$ et $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega(k_{\max} - 1)}$

k et j sont respectivement les indices de temps et d'espace tels que :

$$t = (k-1)\Delta t \text{ avec } 1 \leq k \leq k_{\max}$$

$$z = (j-1)\Delta z \text{ avec } 1 \leq j \leq j_{\max}$$

On adopte pour la discrétisation des équations du système intégral un schéma aux différences finies de type implicite, retardé en temps (Nougier, 1989).

Les équations, discrétisées au point M(j,k+1) du maillage, conduisent au système des équations algébriques suivant :

$$\begin{aligned} C_{j,k+1} A_{j,k+1} + B_{j,k+1} A_{j+1,k+1} - B_{j,k+1} A_{j-1,k+1} = & A_{j,k} \\ & - F(q_{j+1,k+1} - q_{j-1,k+1}) \end{aligned} \quad [19]$$

$$q_{2,j,k+1} + \frac{2}{R_0 + A_{j,k}} A_{j,k+1} q_{j,k} = D_{j,k} \quad [20]$$

où :

$$\begin{aligned} D_{j,k} = & q_{2,j,k} + \frac{2}{A_{j,k} + R_0} q_{j,k} A_{j,k} - \Delta t (2\alpha_{1,j,k} q_{j,k} \frac{(q_{j+1,k} - q_{j-1,k})}{2\Delta z} \\ & + q_{j,k}^2 \frac{(\alpha_{1j+1,k} - \alpha_{1j-1,k})}{2\Delta z} + 2\alpha_{2,j,k} q_{3,j,k} \frac{(q_{3j+1,k} - q_{3j-1,k})}{2\Delta z} \\ & + q_{3,j,k}^2 \frac{(\alpha_{2j+1,k} - \alpha_{2j-1,k})}{2\Delta z} + \frac{2\alpha_{1,j,k}}{R_0 + A_{j,k}} q_{j,k}^2 \frac{(A_{j+1,k} - A_{j-1,k})}{2\Delta z} \\ & + \frac{2\alpha_{2,j,k}}{R_0 + A_{j,k}} q_{3,j,k}^2 \frac{(A_{j+1,k} - A_{j-1,k})}{2\Delta z} \\ & - \frac{\Delta t}{\alpha \rho} (1-x_0^2) \frac{(A_{j+1,k} - A_{j-1,k})}{2\Delta z} \\ & + \frac{2\Delta t}{R_0 + A_{j,k}} \frac{(A_{j+1,k} - A_{j-1,k})}{2\Delta z} \left(\frac{L_p}{\alpha} A_{j,k} \right)^2 \\ & + \frac{2\Delta t}{\rho(R_0 + A_{j,k})^2} \left((\eta_a \frac{\partial w}{\partial x})_{x=1} - x_0 (\eta_a \frac{\partial w}{\partial x})_{x=x_0} \right) \end{aligned}$$

$$C_{j,k+1} = 1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{q_{j+1,k+1} - q_{j-1,k+1}}{2\Delta z} + \frac{2L_p}{\alpha} \right)$$

$$B_{j,k+1} = \frac{\Delta t}{2\Delta z} q_{j,k+1} \quad , \quad F = \frac{\Delta t}{4} \frac{R_0}{\Delta z}$$

Les données à l'entrée du tube sont exprimées en terme de pression et de vitesse de débit :

$$P_{1,k} = P_0 + P_{01} \sin((k-1)\omega\Delta t) \quad [21]$$

$$q_{1,k} = q_0 + q_{01} \sin((k-1)\omega\Delta t)$$

Le système obtenu est résolu à l'aide de la méthode de double balayage de Choleski (Nougier, 1989).

2. Loi du tube discrétisée et système des équations locales discrétisées

Au point M(j,k+1) du domaine étudié, la pression est donnée par :

$$P_{j,k+1} = P_{ext} + \frac{1}{\alpha} A_{j,k+1} \quad [22]$$

Les équations locales sont aussi discrétisées suivant un schéma implicite retardé en temps ; on obtient alors l'équation algébrique suivante :

* pour $\tau > \tau_0$ [23]

$$A w_{i,j,k+1} + B w_{i+1,j,k+1} + C w_{i-1,j,k+1} = D$$

$$\begin{aligned} u_{i,j,k+1} = & \frac{R_0 + A_{j,k+1}}{(i-1)\Delta x} S_{i,j,k+1} \\ & + \frac{(A_{j+1,k+1} - A_{j-1,k+1})}{2\Delta z} \left(-\frac{2S_{i,j,k+1}}{(i-1)\Delta x} + (i-1)\Delta x w_{i,j,k+1} \right) \end{aligned} \quad [24]$$

* pour $\tau \leq \tau_0$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{i,j,k+1} = 0 \quad [25]$$

$$u_{i,j,k+1} = -\frac{R_0 + A_{j,k+1}}{2} x_i \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{i_0,j,k+1}$$

$$\text{où : } S = \int_{x_0}^x y w dy, \quad S_1 = \int_{x_0}^x y \frac{\partial w}{\partial z} dy,$$

$$x_i = (i-1)\Delta x \text{ et } x_0 = (i_0 - 1)\Delta x$$

(i_0 indice correspondant à la situation $\tau = \tau_0$)

$$A = 1 + \Delta t \left[\frac{2}{(\Delta x)^2} \frac{K}{\rho(A_{j,k+1} + R_0)^{n+1}} f_{i,j,k+1} - \frac{u_{i,j,k+1}}{(i-1)\Delta x(A_{j,k+1} + R_0)} - \frac{1}{R_0 + A_{j,k+1}} \frac{(u_{i+1,j,k+1} - u_{i-1,j,k+1})}{2\Delta x} \right]$$

$$B = -\Delta t \left[\frac{K}{\rho(\Delta x)^2 (A_{j,k+1} + R_0)^{n+1}} f_{i,j,k+1} + \frac{1}{2\Delta x} \left\{ -\frac{u_{i,j,k+1}}{R_0 + A_{j,k+1}} + \frac{K(f_{i+1,j,k+1} - f_{i-1,j,k+1})}{2\rho\Delta x (R_0 + A_{j,k+1})^{n+1}} \right\} \right]$$

$$C = -\Delta t \left[\frac{K}{\rho(\Delta x)^2 (A_{j,k+1} + R_0)^{n+1}} f_{i,j,k+1} - \frac{1}{2\Delta x} \left\{ -\frac{u_{i,j,k+1}}{R_0 + A_{j,k+1}} + \frac{K(f_{i+1,j,k+1} - f_{i-1,j,k+1})}{2\rho\Delta x (R_0 + A_{j,k+1})^{n+1}} \right\} \right]$$

$$D = w_{i,j,k} - \Delta t \left[\frac{1}{\rho} \frac{(P_{j+1,k+1} - P_{j-1,k+1})}{2\Delta z} + \frac{\tau_0}{\rho\Delta x (i-1)(R_0 + A_{j,k+1})} \right]$$

$$+ \frac{(i-1)}{2(R_0 + A_{j,k})} (w_{i+1,j,k} - w_{i-1,j,k})(A_{j,k+1} - A_{j,k})$$

$$\text{avec } f = \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^{n-1}$$

Le système obtenu est résolu par une méthode de double balayage, (Nougier, 1989), en tenant compte des conditions aux limites :

- l'axisymétrie de l'écoulement :

$$w_{1,j,k+1} = \frac{4w(2,j,k+1) - w(3,j,k+1)}{3} \quad [26]$$

$$u_{1,j,k+1} = 0$$

- sur la paroi de la conduite :

$$w_{i \max,j,k+1} = -L_p (P - P_{ext}) \frac{\partial R}{\partial z} \quad [27]$$

$$u_{i \max,j,k+1} = L_p (P - P_{ext}) + \frac{\partial R}{\partial t}$$

3. Profil initial, tests de convergence, données du programme et processus de résolution

Le profil initial peut être absolument quelconque pourvu qu'il satisfasse aux conditions aux limites. Toutefois pour réduire le temps de calcul, on choisit un profil initial qui soit assez proche du profil réel. On prendra dans ce cas le profil correspondant à un écoulement permanent de fluide Newtonien en conduite cylindrique poreuse (Zeggwagh, 1988).

Les critères de convergence et de périodicité de la solution portent sur la pression. Si m est le nombre de cycles de calcul et $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ deux quantités petites fixées à l'avance, on impose :

$$\text{Sup} \left| \frac{P_m(z,t) - P_{m+1}(z,t)}{P_m(z,t)} \right| < \varepsilon_1$$

et

$$\text{Sup} \left| \frac{P_m(z,t) - P_{m+1}(z,t+T)}{P_m(z,t+T)} \right| < \varepsilon_1$$

Les données du programme prises dans la littérature (Caro *et al.*, 1978 ; Flaud, 1979) sont les données relatives aux conditions hydrodynamiques et aux paramètres caractérisant le comportement rhéologique du fluide et de la conduite :

- la masse volumique du fluide considéré ρ est égale à 1 g/cm^3 ;
- sa consistance K est égale à 0.07 C.G.S. ;
- son indice de comportement n est égale à 0.5 ;
- la contrainte seuil τ_0 vaut 0.04 dyne/cm^2 ;
- la longueur de la conduite L est égale à 21 cm et son rayon au repos R_0 0.8 cm ;

- le coefficient de filtration L_p vaut $1.6 \cdot 10^{-6} \text{ s cm}^2 \text{ g}^{-1}$;
- la compliance de la paroi α est égale à $1.8 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^3 \text{ dyne}^{-1}$;
- les composantes permanente P_0 et oscillatoire, P_{01} valent respectivement 5320 et 532 dyne cm^{-2} ;
- les composantes permanente q_0 et oscillatoire q_{01} valent respectivement 40.96 et 4.096 cm s^{-1} ;
- la période du mouvement T est égale à 1 s .

Concernant les processus de résolution, les calculs sont amorcés avec les valeurs de

α_1, α_2 et $(\frac{\partial w}{\partial x})_{x=1}$ issues du profil initial. La

résolution du système intégral, puis l'utilisation de la loi du tube permettent d'avoir en toute section et à chaque instant la valeur du gradient de pression.

À partir de la solution des équations locales, les

grandeurs α_1, α_2 et $(\frac{\partial w}{\partial x})_{x=1}$ sont réestimées,

leurs valeurs corrigées permettent de réitérer et ce jusqu'à convergence de la solution.

RÉSULTATS

On considère dans cette étude le cas où l'onde de pression ne subit pas de réflexion et se trouve totalement amortie à l'infini aval. On analyse à la fois l'influence des paramètres rhéologiques du fluide, l'indice de comportement n et la contrainte seuil et ceux de la paroi, compliance α et coefficient de porosité L_p , sur la distribution des vitesses axiale et radiale. Cette analyse est faite en section $z=L/2$ et à l'instant $t=3T/4$.

Les figures 2 et 3 illustrent l'importance de l'indice de comportement sur l'écoulement. Les autres paramètres restant égaux par ailleurs, on a effectué le calcul pour deux valeurs de l'indice de comportement ($n=0.5$ et $n=1$) qui correspondent à un fluide de Bingham généralisé pour la première et à un fluide de Bingham simple pour le seconde.

Sur la figure 2, on constate qu'une diminution de n , qui se traduit par une pseudoplasticité plus marquée, s'accompagne d'une diminution de la viscosité apparente qui entraîne une augmentation des amplitudes des vitesses axiales. Ces résultats sont qualitativement semblables à ceux

obtenus par différents auteurs, que ce soit dans le cas de conduites déformables (Rakotomalala, 1989) ou dans le cas de conduites rigides tronconiques (Theodorou, 1983 ; Zeggwagh, 1988).

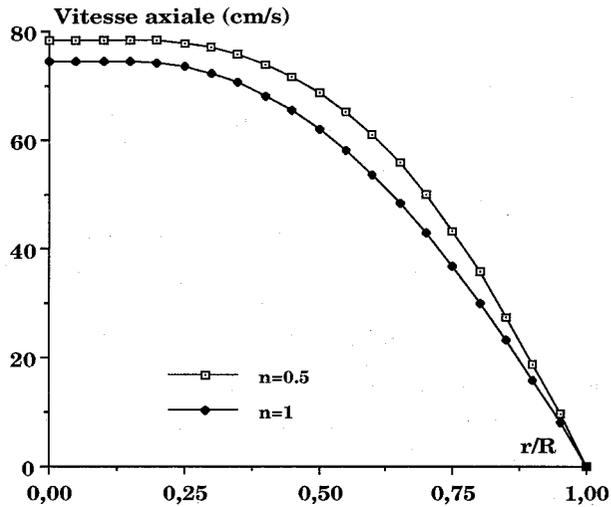


Figure 2. Evolution des profils de vitesse axiale en $z=L/2$ et $t=3T/4$ pour 2 valeurs de l'indice de comportement n

Par contre, sur la figure 3 une augmentation de n s'accompagne d'une augmentation de la viscosité apparente, ce qui entraîne une augmentation de la valeur des amplitudes des vitesses radiales.

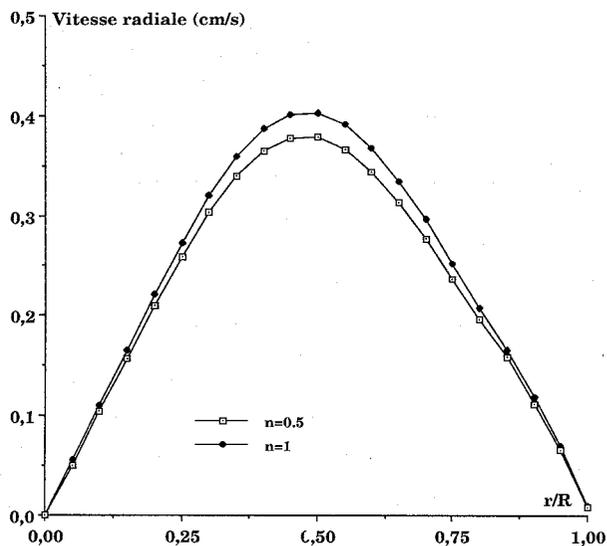


Figure 3. Évolution des profils de vitesse radiale en $z=L/2$ et $t=3T/4$ pour 2 valeurs de l'indice de comportement n

La figure 4 indique la variation des profils de vitesses axiales en fonction de la contrainte seuil τ_0 du fluide. L'influence de ce paramètre

rhéologique est directement liée à la viscosité apparente du fluide. La diminution des valeurs des vitesses axiales d'une part et d'autre part l'aplatissement des profils au centre est due à l'accroissement du frottement interne entre les diverses couches coaxiales du fluide lorsque τ_0 augmente.

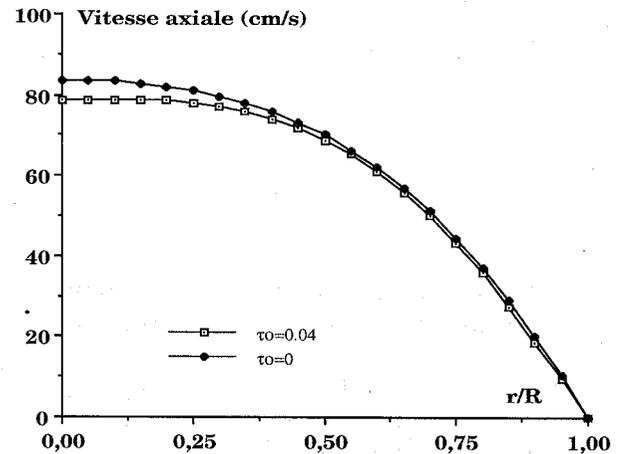


Figure 4. Évolution des profils de vitesse axiale en $z=L/2$ et $t=3T/4$ pour 2 valeurs de la contrainte seuil τ_0

Sur la figure 5, une augmentation de la contrainte seuil du fluide se traduit par une augmentation des amplitudes des vitesses radiales. Ceci est due au fait qu'une augmentation de la contrainte seuil entraîne l'augmentation de la viscosité apparente du fluide. On remarque aussi que les deux courbes sont déphasées, celle correspondant à $\tau_0=0,04$ est en avance de phase sur celle correspondant à $\tau_0=0$.

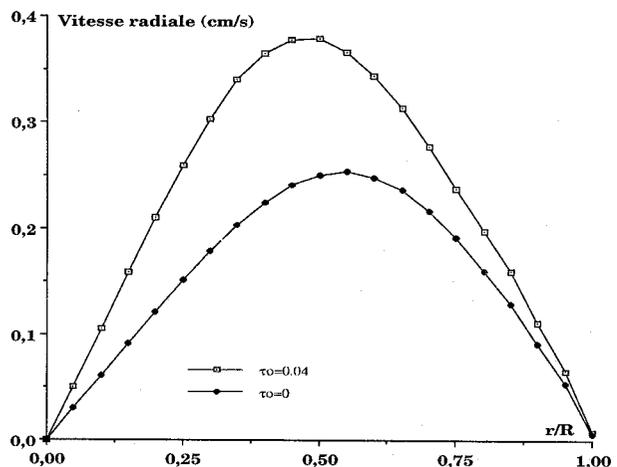


Figure 5. Évolution des profils de vitesse radiale en $z=L/2$ et $t=3T/4$ pour 2 valeurs de la contrainte seuil τ_0

Les figures 6 et 7 montrent l'influence de la compliance α de la paroi sur la distribution des vitesses axiale et radiale.

On constate, sur la figure 6, qu'une augmentation de compliance entraîne une augmentation des valeurs des vitesses axiales sur toute la section de la conduite. Ce résultat peut s'expliquer à partir de la relation [2]. En effet, l'influence de α sur la pression est assez faible (Hammoumi *et al.*, 1993), la variation du rayon est proportionnelle au coefficient d'élasticité. Une augmentation de α entraîne donc celle de la variation du rayon, qui entraîne une augmentation des valeurs des vitesses axiales.

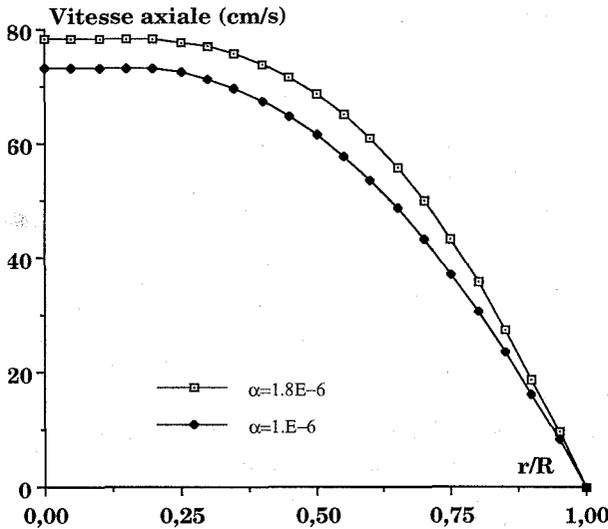


Figure 6.Évolution des profils de vitesse axiale en $z=L/2$ et $t=3T/4$ pour 2 valeurs du coefficient d'élasticité α

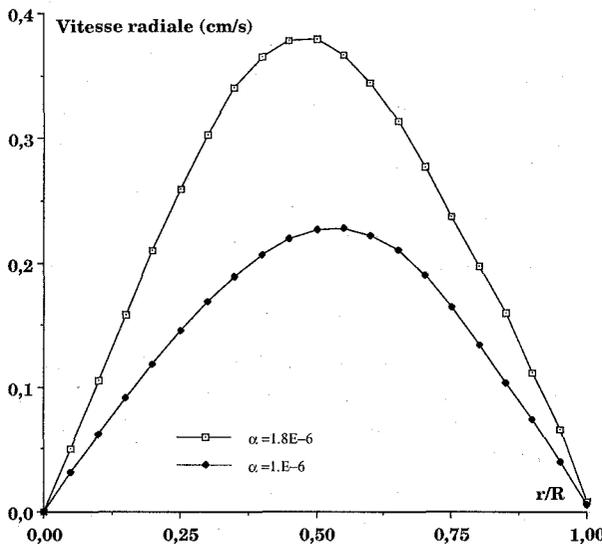


Figure 7.Évolution des profils de vitesse radiale en $z=L/2$ et $t=3T/4$ pour 2 valeurs du coefficient d'élasticité α

Les évolutions des vitesses radiales pour deux valeurs de compliance α (10^{-6} dyne $^{-1}$ cm 3 et $1.8 \cdot 10^{-6}$ dyne $^{-1}$ cm 3) de la paroi sont illustrées sur la figure 7.

Une augmentation de α identique à une diminution du module d'Young du matériau entraîne une augmentation de la valeur des vitesses radiales. Ceci est dû au fait qu'une augmentation de l'élasticité de la paroi de la conduite entraîne une plus grande déformabilité de cette dernière et donc une plus grande valeur de la vitesse radiale à la paroi et ainsi de suite pour tous les autres points de la section considérée.

Sur la figure 8, est portée l'influence du coefficient de filtration L_p sur les vitesses axiales. On constate qu'une diminution du coefficient de filtration se traduit par une augmentation des vitesses. On assiste aussi à un aplatissement des profils de vitesses axiales quand la valeur de L_p augmente.

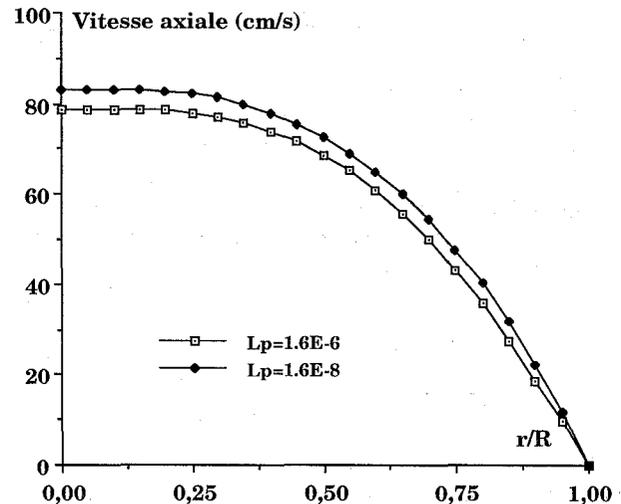


Figure 8.Évolution des profils de vitesse axiale en $z=L/2$ et $t=3T/4$ pour 2 valeurs du coefficient de porosité L_p

L'influence du coefficient de filtration L_p sur l'évolution des vitesses radiales est illustré sur la figure 9. On constate que lorsque la valeur du coefficient de filtration passe de : $L_p=1.6 \cdot 10^{-8}$ cm 2 Sg $^{-1}$ à $L_p=1.6 \cdot 10^{-6}$ cm 2 Sg $^{-1}$ les vitesses radiales augmentent sauf sur l'axe où l'on a $u=0$ (condition d'axisymétrie).

Ceci s'explique par le fait qu'une augmentation du coefficient de filtration entraîne une augmentation de la pression (Hammoumi *et al.*, 1993) et donc l'augmentation du terme $\frac{\partial R}{\partial t} + L_p(P(z,t) - P_{ext})$ qui n'est autre que la valeur de la vitesse radiale à la paroi. Ce qui est vrai pour le point situé à la paroi l'est pour chaque point de la section considérée.

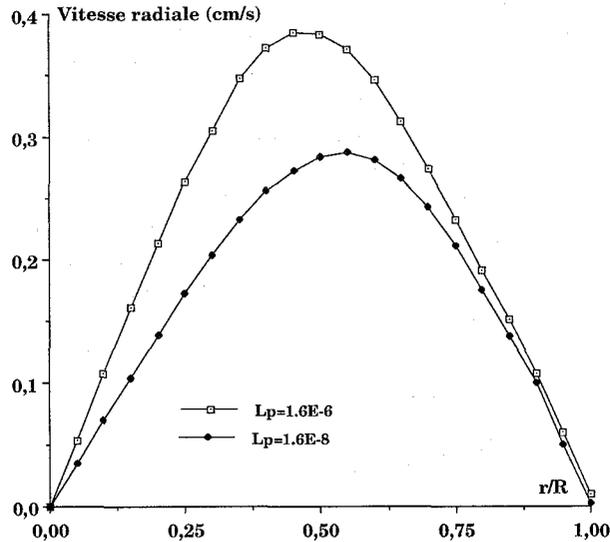


Figure 9. Evolution des profils de vitesse radiale en $z=L/2$ et $t=3T/4$ pour 2 valeurs du coefficient de porosité L_p

CONCLUSION

Cette étude, qui a traité des écoulements non stationnaires et bidimensionnels de fluides plastiques dont les équations sont le siège de non linéarité dues aux termes convectifs de l'accélération et du modèle rhéologique du fluide, a été abordée sous un aspect assez général.

Elle nous a permis d'analyser l'influence et l'évolution des phénomènes liés à l'indice de comportement n du fluide, à la contrainte seuil τ_0 , à la compliance α caractérisant l'élasticité de la paroi, et au coefficient de filtration L_p .

Les résultats obtenus montrent l'importance qu'il y a à tenir compte de la nature de la paroi artérielle

(élastique, imperméable ou poreuse) et de la nature du fluide (fluide non newtonien inélastique).

Ces résultats devraient contribuer à une meilleure connaissance des processus intervenant dans la circulation sanguine et, par conséquent, à des applications en hémodynamique.

RÉFÉRENCES CITÉES

- Bahrar B. (1986) Influence, sur les écoulements transitoires en conduite, des termes d'inertie de la paroi, ainsi que des déformations de flexion et de cisaillement. Thèse de Doctorat de 3^e cycle, I.N.S.A, Lyon
- Bellet D. (1973) Relations entre comportements rhéologiques pseudoplastiques et échanges thermiques. Thèse de Doctorat ès-Sciences, U.P.S.,Toulouse
- Bitoun J.P. (1985) Études théorique et expérimentale de la microcirculation sanguine au passage d'une sténose. Thèse de Doctorat de l'I.N.P, Toulouse
- Bretteville J., Khalid-Naciri J. & Zagzoule M. (1987) Expression de la contrainte pariétale pour un écoulement instationnaire dans une conduite déformable. C.R.A.S., 303, tome II, n° 17, pp. 1525-1528, Paris
- Burton A.C. (1972) Physiologie et biophysique de la circulation. Masson, Paris
- Buthaud H. (1977) Analyse non linéaire et bidimensionnelle de l'écoulement sanguin dans un modèle de l'aorte. Thèse de Docteur- ingénieur, Poitiers
- Caro C.G., Pedley T.J., Schroter R.C. & Seed W.A. (1978) The mechanics of the circulation. Oxford University Press
- Dufaux J. (1982) Étude expérimentale de la viscosité de suspensions de globules rouges, vérification d'une loi de viscosité. Thèse de Doctorat d'État ès-Sciences, Paris VII
- Flaud P. (1979) Influence des propriétés non linéaires sur la dynamique des écoulements dans un tuyau déformable. Thèse de Doctorat d'État ès Sciences, Paris VII

- Hammoumi A., Kerroum M., Gueraoui K. & Zeggwagh G. (1993) Modélisation théorique d'écoulements non permanents de fluides à comportement Newtonien en conduites poreuses à paroi viscoélastique. Application à la circulation sanguine. *Actes Inst. Agron. Vet. (Maroc)* 13 (2) 40-50
- Kerroum M. (1994) Écoulements pulsés de fluides diphasiques en conduites déformables de faibles diamètres. Modélisation de la microcirculation sanguine. Thèse de Doctorat ès Sciences, Rabat
- Lambossy P. (1950) Aperçu historique et critique sur le problème de la propagation des ondes dans un liquide compressible enfermé dans un tube élastique. *Helvetica Physiologica Acta* (1ère partie) 8 : 209-227
- Lambossy P. (1951) Aperçu historique et critique sur le problème de la propagation des ondes dans un liquide compressible enfermé dans un tube élastique. *Helvetica Physiologica Acta* (2ème partie) 9 : 145-161
- Ly D.P., Bellet D., Bousquet A. & Boyer P. (1981) écoulements pulsés de fluides inélastiques en conduites tronconique ou déformable. *Revue de Physique Appliquée* 16 : 323-331
- Nougier J.P. (1989) Méthodes de calcul numérique. 3^{ème} ed. Masson, Paris
- Quemada D. (1978) Rheology of concentrated disperse systems. 3- General features of the proposed non newtonian model. Comparison with experimental data. *Rheol Acta* 17: 643-653
- Rakotomalala A.R. & Bellet D. (1991) Écoulements transitoires et périodiques de fluides non newtoniens en conduites tronconiques. *Journal de Physique* 1 : 87-102
- Rakotomalala A.R. (1989) Écoulements non newtoniens en conduites rigides et déformables. Thèse de Doctorat ès-Sciences, I.N.P, Toulouse
- Rockwell R.L. (1976) Non linear analysis of pressure and shock waves in blood vessels. Ph.D. Dissertation, Stanford University
- Starling E.H. (1894) The influence of mechanical factors on lymph production. *J.Physiol.* 16: 224
- Theodorou G. (1983) Écoulements non permanents de fluides non newtoniens dans un retrécissement de la section. Thèse de Docteur- ingénieur, I.N.P, Toulouse
- Womersley J.R. (1958) An elastic tube theory of pulse transmission and assillatory flow in mammalian arteries. Wright Air Development Center Technical Report, pp. 56-614
- Zagzoule M. (1987) Modélisation mathématique de la circulation sanguine cérébrale: aspects instationnaires et non-newtoniens. Thèse de Doctorat ès-Sciences, U.P.S. Toulouse
- Zeggwagh G. (1988) Modélisations théoriques et expérimentales de l'hémodynamique en microcirculation. Thèse de Doctorat ès-Sciences, I.N.P, Toulouse