

# Écoulements pulsés à deux phases fluide de Bingham généralisé-fluide newtonien en conduites déformables à paroi élastique

Rhajbal CHAMMAMI\*, Mohamed KERROUM\*, Abdellah HAMMOUMI\*□, Kamal GUERAOU\* & Gamal ZEGGWAGH\*

(Reçu le 01/07/1998 ; Révisé le 14/05/1998 ; Accepté le 29/05/1998)

## جريان نبضي دوطورين سائل غير نيوتوني-سانيتوني عبر قنوات ذات بطانة مرنة

نهدف من خلال هذه المساهمة تقديم حلول عددية من خلال حل المعادلات المحلية والعمامة للجريان النبضي لسائل دوطورين مع أخذ بعين الإعتبار الدالة التي تعبر عن مرونة القناة. نحدد توزيع الضغط، الصبيب، مربع الشعاع والسرعة بتطبيق طريقة تحليلية (طريقة الفرق النهائي). وقد درس تأثير العوامل المتعلقة بالسائل على الكميات العمامة والمحلية في مجال يتفق مع معطيات الدورة المجهرية.

**الكلمات المفتاحية :** جريان نبضي - سائل دوطورين - بطانة مرنة - الدورة المجهرية

## Écoulements pulsés à deux phases fluide de Bingham généralisé-fluide newtonien en conduites déformables à paroi élastique

La résolution du système des équations intégrales et locales régissant les écoulements pulsés de fluides à deux phases, en tenant compte de la loi de tube, permet la détermination des distributions temporelles des débits, des rayons, des vitesses et des pressions en chaque section du conduit supposé élastique. Cette résolution est faite à l'aide d'une méthode numérique itérative, couplant les deux systèmes d'équations. L'influence des paramètres rhéologiques du fluide sur ces quantités globales et locales est analysée pour la gamme des valeurs rencontrées en microcirculation.

**Mots clés:** Écoulements pulsés - Fluides à deux phases-Paroi élastique-Microcirculation

## Pulsatile flow of two -phase fluid generalized Bingham-Newtonian through deformable tubes

The resolution of the system integral and local equations, which determines the movement of the two-phase flow fluids Bingham generalized-Newtonian, with deformable conducts, which have an elastic tube, allows the determination of the temporal distributions of flow rate, radius, pressures and velocities profiles in each section of the conduct which is supposed to be elastic, resolution is made with the help of frequent numerical methods. The influence of the rheological parameters of pipe and fluids on these local and global quantities is analysed by specific values found in microcirculation.

**Key words :** Pulsatile flow -Two phase fluids- Elastic tube-Microcirculation

\* Groupe de Mécanique des fluides et des structures, Laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences, Rabat

□ Auteur correspondant

## INTRODUCTION

Les écoulements des fluides diphasiques en microcirculation ont été étudiés avec des hypothèses diverses. La persistance des effets pulsatiles générés par l'action du cœur dans le réseau microcirculatoire a été mise en évidence par Landis (1926). Par la suite, de nombreux auteurs ont tenu compte de la nature pulsée des écoulements sanguins (Bugliarello & Sevilla, 1970; Bitoun, 1985; Zeggwagh, 1988).

Certains auteurs (Théodourou, 1983; Bitoun, 1985; Tazi, 1991) considèrent des géométries présentant des singularités modélisant ainsi l'écoulement sanguin au passage de sténoses pour étudier l'influence sur l'écoulement des dépôts de graisse le long de la paroi des vaisseaux. Les vaisseaux sanguins ne sont pas uniformes mais tronconiques au repos, convergents dans le sens artéro-veineux et poreux. L'étude de l'écoulement dans de telles géométries a montré que celui-ci est plus gouverné par la conicité de la conduite que par les phénomènes de filtration (Zeggwagh, 1988).

La paroi vasculaire est constituée principalement par : l'endothélium, les fibres d'élastine, les fibres musculaires lisses et le tissu conjonctif à base de collagène. Les proportions de ces différentes composantes varient suivant le site du réseau microcirculatoire considéré et déterminent la rhéologie de la paroi (Burton, 1967; Caro *et al.*, 1978).

En tenant compte de ces diverses études et pour plus se rapprocher de la réalité hémodynamique, on considère, à la fois le caractère non permanent, pulsé de l'écoulement, l'aspect diphasique du fluide, le comportement non newtonien de la phase centrale et la déformabilité la paroi que l'on considère élastique.

La détermination des quantités globales et locales des écoulements est réalisée grâce à une méthode numérique itérative

## MÉTHODES

### Mise en équations

L'écoulement diphasique, de vitesse axiale  $w(r,z,t)$  et radiale  $u(r,z,t)$  en chaque point  $M(r,z)$ , comprend un noyau central de rayon  $A(z,t)$ , modélisant le noyau érythrocytaire, de viscosité apparente  $\eta_a$  supposée être celle d'un fluide de Bingham

généralisé entouré d'un manchon, représentant le plasma de viscosité dynamique constante  $\eta_p$  (Figure 1).

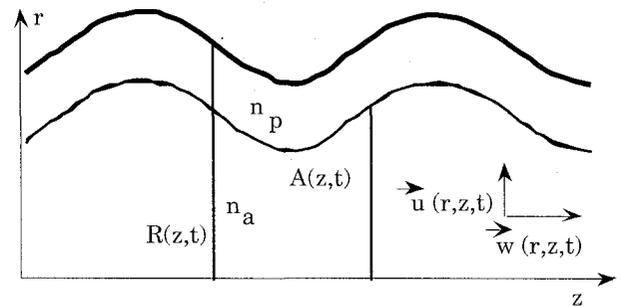


Figure 1. Géométrie de la conduite

Les deux fluides sont incompressibles et ont la même masse volumique  $\rho$ . La conduite concernée est un tube axisymétrique déformable, de longueur  $L$ , d'axe  $\vec{OZ}$ , de rayon au repos  $R_0$  et de rayon non permanent  $R(z,t)$ .

Le comportement rhéologique élastique de la paroi est décrit à tout instant et en chaque section  $S$  par une loi de tube rayon-pressure :

$$S - S_0 = K_e (P - P_{ext}) \quad [1]$$

Où  $S$  et  $S_0$  sont les sections du tube à l'état déformé et à l'état de repos et  $K_e$  un coefficient caractéristique de la rigidité de la paroi,  $P$  la pression intérieure au fluide et  $P_{ext}$  la pression extérieure au tube supposée constante.

Les équations traduisant la conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement sont écrites pour chaque phase de l'écoulement. On leur associe des conditions aux limites traduisant l'axisymétrie de l'écoulement, l'adhérence des particules fluides à la paroi dont on néglige le déplacement transversal, la continuité des vitesses et la continuité des contraintes à l'interface

Le comportement rhéologique du fluide central est modélisé par la loi de Hadjsadok (1993) et Gueraoui (1995):

$$\eta_a \frac{\partial w_n}{\partial r} = -\tau_0 + ok \left| \frac{\partial w_n}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial w_n}{\partial r} \quad \text{pour } \tau > \tau_0$$

$$\text{et } \frac{\partial w_n}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } \tau \leq \tau_0$$

où:

$\tau_0$  est la contrainte seuil,  $ok$  la consistance,  $n$  l'indice de comportement du fluide et  $\tau$  la valeur absolue de la contrainte de cisaillement.

Pour des valeurs particulières de  $\tau_0$ ,  $ok$  et  $n$  on obtient différents modèles de fluides (Newton, Oswald, Bingham, Bingham généralisé) (Lyet *al.*, 1981; Gueraouiet *al.*, 1996). Ainsi le cas d'un fluide newtonien est obtenu pour  $\tau_0=0$  et  $n=1$ , Ostwaldien  $\tau_0=0$  et Bingham simple  $n=1$ .

Des macrophotographies d'écoulements, réalisées par vidéomicroscopie (Bitoun, 1985; Zeggwagh, 1988) montrent qu'en microcirculation, l'interface entre les deux fluides considérés a sensiblement le même profil que la paroi du conduit et que l'épaisseur de la couche plasmatique fluctue autour d'une valeur moyenne égale au dixième du rayon (Dufaux, 1982, Yardin, 1985).

On posera donc à tout instant et en chaque section:  $A(z,t) = aR(z,t)$  avec  $a=0.9$  [2]

Afin de mettre en évidence des nombres sans dimension caractéristique de l'écoulement et dont l'ordre de grandeur pour l'application envisagée permet de mesurer l'importance relative des différentes contributions, on introduit les grandeurs adimensionnelles [éq 3] où  $W_0$  est une vitesse caractéristique de l'écoulement dans la direction axiale;  $\omega$  est la pulsation commune des pressions à l'entrée ( $z = 0$ ) et à la sortie ( $z = 1$ ) du conduit supposées connues,  $Q$  est le débit. La viscosité  $\eta_p$  de la couche plasmatique est prise comme viscosité de référence.

Dans l'équation [4], il s'introduit les nombres sans dimensions qui sont le nombre de Womersley, mesurant l'importance relative des effets d'instationnarité par rapport aux effets de viscosité, le nombre de Reynolds, mesurant l'importance relative des effets d'inertie par rapport aux effets de viscosité et  $\epsilon$  le paramètre de forme géométrique caractérisant l'unidimensionnalité du problème.

Par souci de simplification d'écriture, les dépendances en temps et en variables spatiales des différentes grandeurs seront délibérément omises. Compte tenu des hypothèses simplificatrices

motivées par les ordres des grandeurs de ces différents paramètres en microcirculation, l'écoulement est unidimensionnel et les termes convectifs d'accélération sont négligés.

En effet, les faibles rayons des conduits en microcirculation (Burton, 1967; Fung, 1972; Caro *et al.*, 1978; Comolet, 1984) font que l'écoulement a une direction privilégiée qui est celle de l'axe du conduit:  $\epsilon^2 \ll 1$  et  $Re \epsilon \ll 1$ .

Ces simplifications conduisent à un gradient de pression transversal nul en chaque section et les équations adimensionnelles locales traduisant la conservation de la quantité de mouvement et la continuité de la masse au sein de chaque phase de l'écoulement s'écrivent:

Dans le noyau:  $0 < r < A$

$$\beta^2 \frac{\partial wn}{\partial t} = - \frac{\partial Pn}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\eta_a r \frac{\partial wn}{\partial r})$$

$$\frac{\partial wn}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (run) = 0$$

Dans le plasma:  $A \leq r \leq R$

$$\beta^2 \frac{\partial wp}{\partial t} = - \frac{\partial Pp}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial wp}{\partial r})$$

$$\frac{\partial wp}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rup) = 0$$

Les conditions aux limites qui traduisent la symétrie de l'écoulement et l'adhérence à la paroi sont:

$$\frac{\partial wn}{\partial r} = 0 \text{ et } un = 0 \text{ pour } r = 0$$

$$wp = 0 \text{ et } up = \frac{\beta^2}{Re\epsilon} \frac{\partial R}{\partial t} \text{ pour } r = R$$

La continuité du champ des vitesses et des contraintes tangentielles et normales à l'interface impose:

$$un = up \quad wn = wp \text{ pour } r = A$$

$$\frac{\partial wp}{\partial r} = \eta_a \frac{\partial wn}{\partial r} \text{ pour } r = A$$

$$Pn(z,t) = Pp(z,t) \text{ pour } r = A$$

$$r^+ = \frac{r}{R_0}; A^+ = \frac{A}{R_0}; z^+ = \frac{z}{l}; t^+ = \frac{t}{2\pi} \omega; W^+ = \frac{W}{W_0}; u^+ = \frac{ul}{R_0 W_0}; P^+ = \frac{PR_0^2}{l \eta_p W_0}$$

$$S^+ = \frac{S}{R_0^2 \pi} = R^2; Q^+ = \frac{Q}{R_0^2 W_0 \pi}; \eta^+ = \frac{\eta}{\eta_p}$$

$$\beta = R_0 \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\pi \eta_p}}; Re = \rho \frac{W_0 R_0}{\eta_p}; \epsilon = \frac{R_0}{l}$$

Cette dernière condition impose à la pression d'être uniforme à chaque instant, le long de toute section droite du conduit. On notera, dorénavant,  $P(z,t)$  cette pression, sans préciser l'indice du fluide.

On obtient, pour chaque fluide un système de deux équations à trois inconnues qui sont : le gradient longitudinal de la pression et les composantes axiale et radiale de la vitesse. Pour résoudre ces systèmes, on fait intervenir le système des équations intégrales établies en intégrant les systèmes des équations locales et en tenant compte des conditions aux limites. Le système des équations intégrales obtenu alors s'écrit

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\beta^2}{Re\epsilon} \frac{\partial R^2}{\partial t} = 0$$

$$\beta^2 \frac{\partial Q}{\partial t} + R^2 \frac{\partial P}{\partial z} = 2R\tau_p$$

o  $\tau_p = \left(\frac{\partial w_p}{\partial r}\right)_{r=R}$  est la contrainte pariétale de l'écoulement [10]

Au système [10], on adjoint des conditions aux limites en terme de pressions pulsées à l'entrée et à la sortie de la conduite telles que:

$$P(z=0,t) = p_1 + p_2 \cos(2\pi t)$$

$$P(z=1,t) = p_3 + p_4 \cos(2\pi t)$$

et la loi de tube, qui s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$R^2 - 1 = K_e(P - P_{ext}) \quad \text{o} : K^+_e = K_e \frac{\eta_p l w_0}{\pi R^4} \quad [12]$$

Comme la pression extérieure est supposée constante, le gradient de pression est :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{K_e} \left(\frac{\partial R^2}{\partial z}\right) \quad [13]$$

En injectant l'expression [13] dans l'équation intégrale traduisant la conservation de la quantité de mouvement on obtient :

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\beta^2}{Re\epsilon} \frac{\partial R^2}{\partial t} = 0$$

$$\beta^2 \frac{\partial Q}{\partial t} + R^2 \frac{1}{K_e} \left(\frac{\partial R^2}{\partial z}\right) = f \quad \text{o} \quad f = 2R\tau_p \quad [14]$$

Les conditions aux limites associées sont exprimées, à l'aide de la loi du tube, en terme de section à l'entrée et à la sortie du tube:

$$R^2(z=0,t) = K_e(P_1 - P_{ext}) + K_e P_2 \cos(2\pi t) + 1$$

$$R^2(z=1,t) = K_e(P_3 - P_{ext}) + K_e P_4 \cos(2\pi t) + 1 \quad [15]$$

Ces systèmes d'équations sont résolus à l'aide d'une méthode numérique aux différences finies, itérative couplant à chaque itération le système des équations intégrales et le système des équations locales. La périodicité des solutions tient compte de condition initiale (Annexe).

### RÉSULTATS & DISCUSIONS

Sont présentées, à titre d'illustration, les évolutions temporelles au milieu du conduit ( $z=L/2$ ) de la pression, du gradient de pression, de la section, du débit et de la contrainte pariétale ainsi que les profils de la vitesse axiale en  $t=T/2$  (Figures 2, 3, 4, 5, 6 & 7).

Sur la figure 2, on remarque que la nature du fluide n'affecte pas les distributions des pressions au cours du temps, dans les deux modèles car les pressions sont imposées aux extrémités du conduit

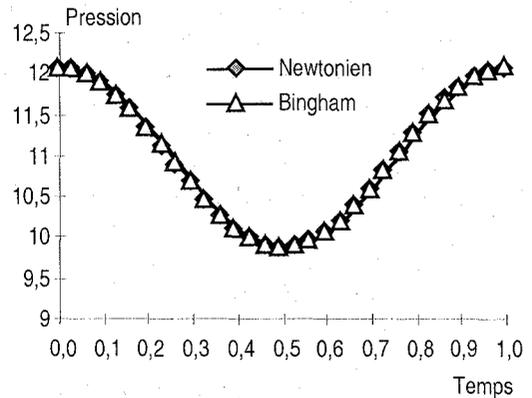


Figure 2. Évolution temporelle de la pression pour deux modèles diphasiques (Bingham généralisé-newtonien et newtonien-newtonien)

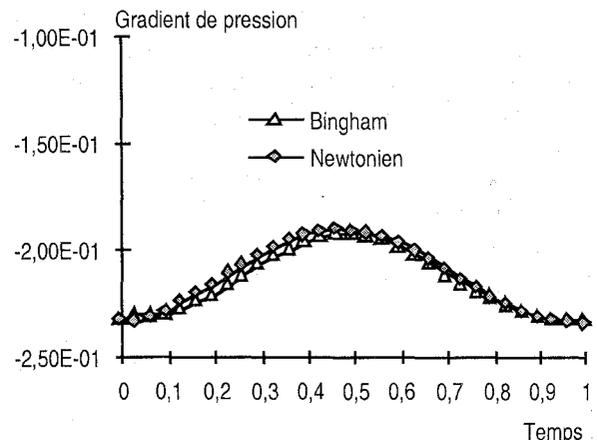


Figure 3. Évolution temporelle du gradient de pression pour deux modèles diphasiques (Bingham généralisé-newtonien et newtonien-newtonien)

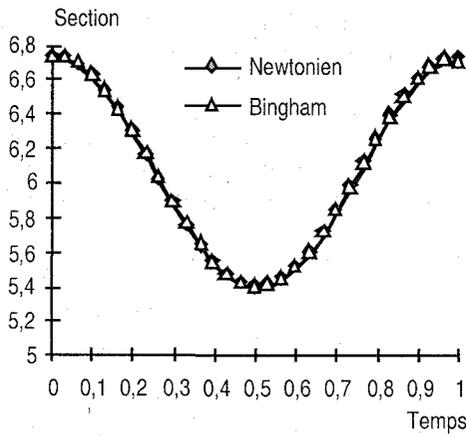


Figure 4. Évolution temporelle de la section pour deux modèles diphasiques (Bingham généralisé-newtonien et newtonien-newtonien)

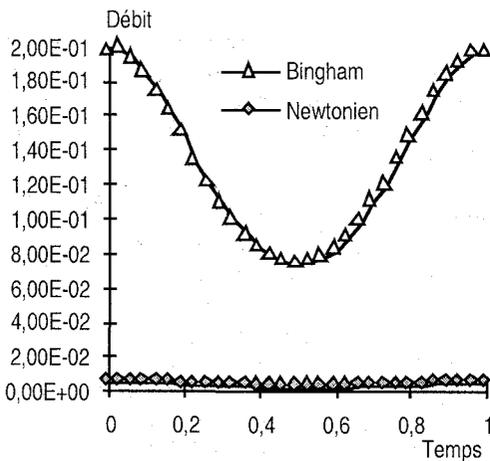


Figure 5. Évolution temporelle du débit pour deux modèles diphasiques (Bingham généralisé-newtonien et newtonien-newtonien)

dont la longueur est petite. La loi du tube prévoit des distributions (Figure 4) de sections elles aussi inchangées pour les deux modèles.

Dans la gamme des valeurs numériques utilisées, la figure 7 montre les profils des vitesses axiales en  $z=L/2$  pour  $t=T/2$  pour les deux modèles (fluide newtonien et fluide de Bingham généralisé). Ces profils mettent en évidence le caractère aplati au niveau du centre de l'écoulement pour le fluide de Bingham généralisé, ce qui est une caractéristique des écoulements à noyau central non newtonien.

La figure 6 illustre les distributions des contraintes pariétales en  $z=L/2$  au cours du temps ; on retrouve des cisaillements à paroi plus élevés dans le cas du fluide central newtonien.

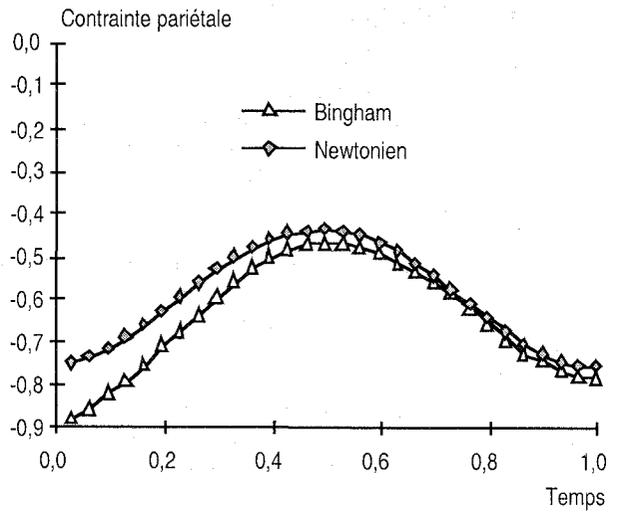


Figure 6. Évolution temporelle de la contrainte pariétale pour deux modèles diphasiques (Bingham généralisé-newtonien et newtonien-newtonien)

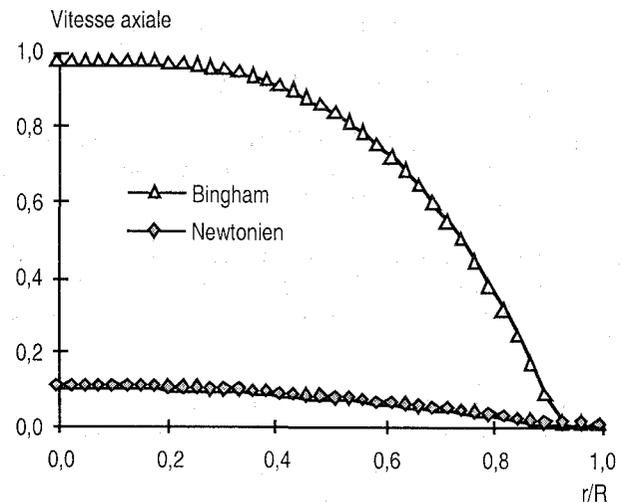


Figure 7. Évolution temporelle de la vitesse axiale pour deux modèles diphasiques (Bingham généralisé-newtonien et newtonien-newtonien)

## CONCLUSION

La prise en compte d'un modèle non newtonien pour le fluide central de l'écoulement est essentielle pour la modélisation convenable des écoulements sanguins en microcirculation car celle-ci permet, entre autres, d'estimer correctement les débits et les cisaillements pariétaux qui sont des grandeurs essentielles dans la compréhension de plusieurs mécanismes physiologiques (formation d'athérosclérose, sténoses, etc...).

## RÉFÉRENCES CITÉES

- Hadjsadok A., Benhadid S., Wang X., Lucius M. & Soltz J. F. (1993) "Viscosimètre de Couette : détermination du taux de cisaillement à partir des modèles de Casson et Casson généralisé" 1er Congrès de Mécanique, Rabat, *Soc. Ma. Sciences Mec* pp 309-317
- LY D. P., Bellet D., Bousquet A. & Boyer P. (1981) Ecoulements pulsés de fluides inélastiques en conduites tronconiques ou déformables *J. physique Appliqué*, Tome 16, pp 323-331
- Burton J.P (1985) Etude théorique et expérimentale de la microcirculation sanguine au passage d'une sténose. Thèse de Doctorat, I. N. P, Toulouse
- Bugliarello G. & Sevilla J. (1970) Velocity distribution and other characteristics of steady and pulsatile blood flow in fine glass tubes *Biorheology* 7:85-107
- Burton A. C. (1967) Physiologie et biologie de la circulation. Masson, Paris
- Buthaud H. (1977) Analyse non linéaire de l'écoulement sanguin modèle de l'aorte. Thèse de docteur Ingénieur, Université de Poitiers
- Caro C. G., Pedley T. J., Schroter R. C. & Seed W. A. (1978) The mechanics of the circulation. Oxford University Press, Oxford
- Dufaux J. (1982) Etude expérimentale de la viscosité de suspension de globules rouges. Vérifications d'une loi de viscosité. Thèse de Doctorat d'Etat, University ParisVII
- Landis E. M (1926) The capillary pressure in frog mesentery as determined by micro-injection *Am. J. Physiol.* 7:548-570
- Nougier (1989) Méthodes de calcul numérique. 3ème ed. Masson, Paris
- Skalak T.C. & Bellet Schmid-Schonbein G.W. (1986) Viscoelastic properties of microvessels in rat spinotrapezius muscle *J. Biom. Eng.* 108:93-200
- Tazi M. (1991) Modélisation d'écoulements sanguins au passage de bifurcations. Thèse de Doctorat, I. N. P Toulouse
- Theodorou G. (1983) Ecoulements non permanents des fluides non newtoniens dans un rétrécissement de section. Thèse de Docteur Ingénieur, I. N. P Toulouse
- Yardin G. (1985) Etude des écoulements de suspensions de globules rouges dans des tubes capillaires à très faible cisaillement. Thèse de doctorat de 3ème cycle, Université ParisVII
- Zeggwagh G. (1988) Modélisations théorique et expérimentale de l'hémodynamique en microcirculation. Thèse de Doctorat ès sciences, I. N. P Toulouse
- Comolet R. (1984) Biomécanique circulatoire. Masson, Paris
- Fung Y. C. (1972) Stress-strain-history relations of soft tissues in simple elongation, Biomécanique, its foundations and objectives, Edited by Fung Y. C. , Perrone N. & Anliker M., Prentice-hall, Englewood Cliffs, N. J.
- Gueraoui K. (1995), Ecoulements pulsés de fluides inélastiques en conduites déformables poreuses et anisotropes, thèse de Doctorat de troisième cycle, Rabat
- Kerroum M. (1994) Ecoulements pulsés de fluides diphasiques en conduites déformables de faibles diamètres. Modélisation des écoulements sanguins en microcirculation, thèse de Doctorat d'Etat, Rabat
- Gueraoui K., Hammoumi A. & Zeggwagh G. (1996) Ecoulements pulsés de fluides inélastiques en conduites déformables poreuse et anisotrope, *C. R. Acad. Sci.* Paris, t. 323, série II b, pp 825-832
- Hammoumi A., Kerroum M., Gueraoui K. & Zeggwagh G. (1993) Modélisation théorique d'écoulements non permanents de fluides newtoniens en conduites déformables poreuses. Application à la circulation sanguine. *Actes Inst. Agron. Vet. (Maroc)*, Vol. 13(2): 41-50

## ANNEXE : RÉOLUTION NUMÉRIQUE

Le domaine d'étude est un domaine à deux dimensions (z, t), pourvu d'un maillage à pas constants  $\Delta z$  et  $\Delta t$  définis par :

$$\Delta z = \frac{1}{j_{\max} - 1} \quad \text{et} \quad \Delta t = \frac{1}{k_{\max} - 1}$$

où k et j sont respectivement les indices de temps et d'espace tels que :

$$t = (k - 1)\Delta t \quad \text{avec} \quad 1 \leq k \leq k_{\max}$$

$$\text{et} \quad z = (j - 1)\Delta z \quad \text{avec} \quad 1 \leq j \leq j_{\max}$$

### 1. Discrétisation du système intégral

On adopte pour la discrétisation des équations du système intégral un schéma aux différences finies

centré en espace et retardé en temps. On aboutit au système d'équations algébriques [éq. 1] & [éq. 2].

Il s'agit d'un système algébrique linéaire où les inconnues sont les quantités définies à l'instant  $t+Dt$  (indiciées en  $k+1$ ) et où les coefficients et les seconds membres sont définis à l'instant  $t$  (indiciés en  $k$ )

Les conditions aux limites s'écrivent sous forme discrétisée [éq. 3]:

La matrice associée au système linéaire [éq. 1] est tridiagonale; on adopte pour la résolution, une méthode de double balayage de Choleski (Nougier, 1989).

On suppose qu'à tout instant  $t+\Delta t$  et en toute section  $S$ , le débit et la section sont reliés par une relation du type [éq. 4].

En injectant la relation [éq. 4] dans le système discrétisé (1), on obtient les formules de récurrence permettant de calculer, à chaque fois, les termes des suites  $(\alpha_{j,k+1})_j, (\delta_{j,k+1})_j$  définies à l'instant  $t+\Delta t$ .

on aura alors [éq. 5].

La pression et la section sont connues à tout instant à l'entrée du conduit [éq.6].

$$R^2_{1,k+1} = \alpha_{1,k+1}q_{1,k+1} + \delta_{1,k+1} \quad [6]$$

On obtient les premiers termes des suites  $(\alpha_{j,k+1})_j, (\delta_{j,k+1})_j$

$$\alpha_{1,k+1} = 0 \quad [7]$$

$$\delta_{1,k+1} = R^2_{1,k+1} \quad [8]$$

À la sortie du tube, la relation:

$$R^2_{j_{max},k+1} = \alpha_{j_{max},k+1}q_{j_{max},k+1} + \delta_{j_{max},k+1} \quad [9]$$

permet de calculer le débit  $q_{j_{max},k+1}$  à l'instant considéré:

$$q_{j_{max},k+1} = \frac{R^2_{j_{max},k+1} - \delta_{j_{max},k+1}}{\alpha_{j_{max},k+1}} \quad [10]$$

En procédant ainsi de proche en proche le long du tube, on détermine les valeurs de la section et du débit.

$$R^2_{j,k+1} = \frac{\beta^2 x_{n2} + x_{n1}}{\beta^2 y - w} \quad [11]$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } x_{n1} &= \gamma + 2\Delta t X_{j+1/2,k+1} - uR^2_{j+1,k+1} - \beta^2 q_{j+1,k+1} \\ x_{n2} &= -yR^2_{j+1,k+1} + q_{j+1,k+1} + g \\ q_{j,k+1} &= yR^2_{j,k+1} - x_{n2} \end{aligned} \quad [12]$$

La loi de tube discrétisée suivant un schéma retardé en temps permet d'avoir, à chaque instant, les valeurs de la pression.

$$q_{j+1,k+1} - q_{j,k+1} + y(R^2_{j+1,k+1} + R^2_{j,k+1}) = g \quad [1]$$

$$\beta^2(q_{j+1,k+1} + q_{j,k+1}) + uR^2_{j+1,k+1} - wR^2_{j,k+1} = \gamma + 2\Delta t X_{j+1/2,k+1}$$

où:

$$y = \frac{\beta^2 \Delta z}{2Re \varepsilon \Delta t} ; \quad g = y(R^2_{j+1,k} + R^2_{j,k}) ; \quad u = \frac{1}{k_e \Delta z} R^2_{j+1,k} ; \quad w = \frac{1}{k_e \Delta z} R^2_{j,k} \quad [2]$$

$$\text{et } \gamma = \frac{\Delta t}{2k_e \Delta z \Delta t} (R^4_{j+1,k} - R^4_{j,k}) + \beta^2(q_{j+1,k} + q_{j,k})$$

$$R^2_{1,k+1} = K_e(P_1 - P_{ext}) + K_e P_2 \cos(2\pi(k-1)\Delta t) + 1 \quad [3]$$

$$R^2_{j_{max},k+1} = K_e(P_3 - P_{ext}) + K_e P_4 \cos(2\pi(k-1)\Delta t) + 1$$

$$R^2_{j,k+1} = \alpha_{j,k+1}q_{j,k+1} + \delta_{j,k+1} \quad [4]$$

$$\alpha_{j+1,k+1} = \frac{y(2\beta^2 y + w)\alpha_{j,k+1} - 2\beta^2}{-\alpha_{j,k+1}(u + w) + (\beta^2 y + w)}$$

$$\delta_{j+1,k+1} = g(\alpha_{j,k+1}, \delta_{j,k+1}) = \frac{y + 2\Delta t X_{j+1/2,k+1} - \alpha_{j,k+1}(y(y + 2\Delta t X_{j+1/2,k+1}) + wg) + \delta_{j,k+1}(w - \beta^2 y)}{-\alpha_{j,k+1}(u + w) + (\beta^2 y + w)} \quad [5]$$

$$P_{j,k+1} = \frac{1}{K_e} (R_{j,k+1}^2 - 1) + P_{\text{ext}} \quad [13]$$

Le gradient de pression sera évalué par l'équation [14], aux extrémités du tube, on l'approxime suivant les équations [15] & [16].

## 2. Discrétisation du système local

En vue de fixer les frontières du domaine d'écoulement et de définir des pas constants, indépendants du temps, dans la direction radiale de la section  $z$  considérée, on effectue le changement de variable suivant:

$$x = \frac{r}{R(z,t)} \quad \text{o} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{j,k+1} = \frac{P_{j+1,k+1} - P_{j-1,k+1}}{2\Delta z} \quad [14]$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{1,k+1} = \frac{4P_{2,k+1} - P_{3,k+1} - 3P_{1,k+1}}{2\Delta z} \quad [15]$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{j_{\text{max}},k+1} = \frac{3P_{j_{\text{max}},k+1} - 4P_{j_{\text{max}}-1,k+1} + P_{j_{\text{max}}-2,k+1}}{2\Delta z} \quad [16]$$

$$w^+(x,z,t) = w^+(x(z,t),z,t) = w(r,z,t)$$

$$u^+(x,z,t) = u^+(x(z,t),z,t) = u(r,z,t)$$

$$\eta_a^+(x,z,t) = \eta_a^+(x(z,t),z,t) = \eta_a(r,z,t) \quad [17]$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{R} \frac{\partial w^+}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w^+}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w^+}{\partial t} - \frac{x}{R} \frac{\partial w^+}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial t} \quad [18]$$

$$\beta^2 R^2 \frac{\partial \text{wn}}{\partial t} = -R^2 \frac{\partial P}{\partial z} + \beta^2 \frac{x}{2} \frac{\partial R^2}{\partial t} \frac{\partial \text{wn}}{\partial x} - \tau_0 \frac{R}{x} + \frac{\text{ok}}{xR^{n-1}} \left| \frac{\partial \text{wn}}{\partial x} \right|^{n-1} \left( \frac{\partial \text{wn}}{\partial x} + nx \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \text{wn}}{\partial x} \right) \right) \quad [19]$$

$$\text{et si} : \tau \leq \tau_0 \quad (0 \leq x \leq x_0)$$

$$\frac{\partial \text{wn}}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \beta^2 \frac{\partial \text{wn}}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} \quad [20]$$

$$\beta^2 R^2 \frac{\partial \text{wp}}{\partial t} = -R^2 \frac{\partial P}{\partial z} + \beta^2 \frac{x}{2} \frac{\partial R^2}{\partial t} \frac{\partial \text{wp}}{\partial x} + \frac{1}{x} \left( \frac{\partial \text{wp}}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \text{wp}}{\partial x} \right) \right) \quad [21]$$

On introduit trois nouvelles fonctions: la vitesse axiale  $w^+(x,z,t)$ , la vitesse radiale  $u^+(x,z,t)$  et la viscosité  $\eta_a^+(x,z,t)$  [éq. 17] & [éq. 18]

Pour la simplification des écritures, on notera dorénavant les vitesses axiale  $w$ , radiale  $u$  et la viscosité  $\eta_a$ . L'équation locale traduisant la conservation de la quantité de mouvement s'écrit:  
- pour le noyau : si  $\tau > \tau_0$  ( $x_0 < x < \alpha$ ) [éq. 19] et si  $\tau \leq \tau_0$  ( $0 < x < x_0$ ) [20].  
- pour le plasma :  $\alpha < x < 1$  [éq. 21].

Soient  $i1$  et  $i2$  respectivement les indices associés à la nouvelle coordonnée radiale  $x$ , pour le noyau et le manchon suivant l'équation [éq. 22].

$$1 \leq i1 \leq i1 \text{ max} \quad \text{et} \quad 1 \leq i2 \leq i2 \text{ max}$$

o :

$$\Delta x1 = \frac{0.9}{i1 \text{ max} - 1} \quad \text{et} \quad \Delta x2 = \frac{0.1}{i2 \text{ max} - 1} \tag{22}$$

avec :

$$\text{pour le noyau} \quad rx1(i1) = (i1 - 1) \Delta x1$$

$$\text{pour le manchon} \quad rx2(i2) = (i2 - 1) \Delta x2 + (i1 \text{ max} - 1) \Delta x1$$

$$bn_{i1,j} wn_{i1-1,j,k+1} + cn_{i1,j} wn_{i1,j,k+1} + dn_{i1,j} wn_{i1+1,j,k+1} = en_{i1,j} \tag{23}$$

où :

$$bn_{i1,j} = \frac{\beta^2 rx1(i1)}{16(\Delta x1)} \left( \left( \frac{\partial R^2}{\partial t} \right)_{j,k} + \left( \frac{\partial R^2}{\partial t} \right)_{j,k+1} \right) + \frac{an_j}{rx1(i1)} hnp_{i1,j} \left( \frac{1}{2\Delta x1} - \frac{nrx1(i1)}{(\Delta x1)^2} \right) \tag{24}$$

$$dn_{i1,j} = -bn_{i1,j} - 2an_j hnp_{i1,j} \frac{n}{(\Delta x1)^2} \tag{25}$$

$$cn_{i1,j} = \frac{\beta^2}{2\Delta t} (R^2_{j,k} + R^2_{j,k+1}) + 2an_j hnp_{i1,j} \frac{n}{(\Delta x1)^2} \tag{26}$$

$$vn_{i1,j} = \frac{\beta^2}{2\Delta t} (R^2_{j,k} + R^2_{j,k+1}) - an_j (3hnp_{i1,j} - hnpp_{i1,j}) \frac{n}{(\Delta x1)^2} \tag{27}$$

$$kn_{i1,j} = \frac{\beta^2 rx1(i1)}{16(\Delta x1)} \left( \left( \frac{\partial R^2}{\partial t} \right)_{j,k} + \left( \frac{\partial R^2}{\partial t} \right)_{j,k+1} \right) + \frac{an_j}{rx1(i1)} (3hnp_{i1,j} - hnpp_{i1,j}) \left( \frac{1}{4\Delta x1} - \frac{nrx1(i1)}{2(\Delta x1)^2} \right) \tag{28}$$

$$xn_{i1,j} = -kn_{i1,j} - an_j (3hnp_{i1,j} - hnpp_{i1,j}) \frac{n}{(\Delta x1)^2} \tag{29}$$

$$en_{i1,j} = -\frac{1}{4} (R^2_{j,k} + R^2_{j,k+1}) \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{j,k+1} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{j,k} + vn_{i1,j} wn_{i1,j,k} - kn_{i1,j} wn_{i1-1,j,k} - xn_{i1,j} wn_{i1+1,j,k} - \frac{\tau_0 (R_{j,k} + R_{j,k+1})}{2rx1(i1)} \tag{30}$$

$$hnp_{i1,j} = \left| \frac{\partial wn}{\partial x} \right|_{i,j,k}^{n-1} \tag{31}$$

$$an_j = \frac{ok}{(r_{j,k})^{n-1} + (r_{j,k+1})^{n-1}} \tag{32}$$

Pour chaque fluide, l'équation correspondante est alors discrétisée suivant un schéma centré en espace et en temps. On aura alors :

- Pour le noyau central:  $\tau > \tau_0$  ( $x_0 < x < \alpha$ ) [éq. 23 à 32].

$$**\text{Pour } \tau \leq \tau_0 \quad (0 \leq x \leq x_0) \quad \left( \frac{\partial wn}{\partial x} \right)_{i0,j,k+1} = 0 \tag{33}$$

\* pour le plasma :  $\alpha \leq x \leq 1$

$$bp_{i2,j} wp_{i2-1,j,k+1} + cp_{i2,j} wp_{i2,j,k+1} + dp_{i2,j} wp_{i2+1,j,k+1} = ep_{i2,j} \tag{34}$$

avec :

$$bp_{i2,j} = \frac{\beta^2 rx2(i2)}{16\Delta x2} \left( \left( \frac{\partial R^2}{\partial t} \right)_{j,k} + \left( \frac{\partial R^2}{\partial t} \right)_{j,k+1} \right) - \frac{1}{2(\Delta x2)^2} + \frac{1}{4\Delta x2 rx2(i2)} \tag{35}$$

$$cp_{i2,j} = \frac{\beta^2}{2\Delta t} (R_{j,k+1}^2 + R_{j,k}^2) + \frac{1}{(\Delta x_2)^2} \quad [36]$$

$$dp_{i2,j} = -bp_{i2,j} - \frac{1}{(\Delta x_2)^2} \quad [37]$$

$$ep_{i2,j} = -\frac{1}{4} (R_{j,k}^2 + R_{j,k+1}^2) \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{j,k} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{j,k+1} - bp_{i2,j} wp_{i2-1,j,k} + (cp_{i2,j} - \frac{2}{(\Delta x_2)^2}) wp_{i2,j,k} - dp_{i2,j} wp_{i2+1,j,k} \quad [38]$$

les coefficients  $bn, cn, dn, kn, vn, xn, en, bp, cp, dp$  et  $ep$  sont fonctions des grandeurs solutions du système intégral à l'instant  $t+\Delta t$  et du profil des vitesses à l'instant précédent.

$$wn_{i0,j,k+1} = \frac{4wn_{i0+1,j,k+1} - wn_{i0+2,j,k+1}}{3} \quad [39]$$

Les conditions aux limites et de continuité associées à ces équations sont :

\*L'axisymétrie de l'écoulement:

$$wn_{i1max,j,k+1} = wp_{1,j,k+1} \quad [41]$$

\*La continuité des contraintes tangentielles:

$$wp_{2,j,k+1} = \frac{wp_{1,j,k+1} + wp_{3,j,k+1}}{4} - \tau_0 \frac{R_{j,k+1}}{2} (\Delta x_2) + ann_{j,k+1} hn_{i1max,j,k+1} + gwn_{i1max,j,k+1} \frac{(\Delta x_2)}{2} \quad [42]$$

$$\text{où : } ann_{j,k+1} = \frac{ok}{(r_{j,k+1})^{n-1}} \quad [43]$$

$$hn_{i1max,j,k+1} = \left| \frac{\partial wn}{\partial x} \right|_{i1max,j,k+1}^{n-1} \quad [44]$$

$$\text{et } gwn_{i1max,j,k+1} = \left( \frac{\partial wn}{\partial x} \right)_{i1max,j,k+1} = \frac{3wn_{i1max,j,k+1} - 4wn_{i1max-1,j,k+1} + wn_{i1max-2,j,k+1}}{2\Delta x_1} \quad [45]$$

La contrainte de cisaillement pariétale de l'écoulement est donnée par :

$$f = 2r_j gwp_{i2max,j,k+1} = 2r_j \left( \frac{\partial wp}{\partial x} \right)_{i2max,j,k+1} = r_j \left( \frac{3wp_{i2max,j,k+1} - 4wp_{i2max-1,j,k+1} + wp_{i2max-2,j,k+1}}{\Delta x_2} \right) \quad [46]$$

Les équations [23] et [34] sont résolues à l'aide de la méthode de double balayage de Choleski (Nougier, 1989).

### 3.Profil initial

Le profil initial peut être absolument quelconque pourvu qu'il satisfasse aux conditions aux limites. Toutefois, pour réduire le temps de calcul, on

\* L'adhérence à la paroi:

$$wp_{i2max,j,k+1} = 0 \quad [40]$$

\*La continuité des vitesses:

choisit un profil qui soit assez proche du profil réel. Pour cela, on a choisi l'écoulement permanent d'un fluide à deux phases (Bingham généralisé-Newtonien) dans une conduite cylindrique rigide.

#### • Test de convergence

Les critères de convergence portent sur la pression et le débit tandis que celui de périodicité porte sur

la pression. Si  $m$  est le nombre de cycles de calcul et  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  trois quantités petites fixées à l'avance, on impose alors à la solution de vérifier :  
Condition de convergence en pression:

$$\sup \left| \frac{P_m(z, t) - P_{m+1}(z, t)}{P_m(z, t)} \right| < \varepsilon_1 \quad [47]$$

#### • Condition de convergence du débit

$$\sup \left| \frac{Q_m(z, t) - Q_m^c(z, t)}{Q_m(z, t)} \right| < \varepsilon_3 \quad [48]$$

ceci permet de comparer, le débit solution du système intégral  $Q(z, t)$  avec la valeur  $Q^c(z, t)$  obtenue à partir du système des équations locales.

#### • Condition de périodicité

$$\sup \left| \frac{P_m(z, t) - P_m(z, t + T)}{P_m(z, t)} \right| < \varepsilon_2 \quad [49]$$

où  $T$  est la période et  $m$  le nombre de cycles.

### Données du programme

Les données du programme utilisées sont prises dans la littérature (Caro *et al.*, 1978; Burton, 1967; Hadjsadok *et al.*, 1993; Flaud, 1979; Buthaud 1977;

Gueraoui, 1995). Ces données sont relatives aux conditions hydrodynamiques et aux paramètres caractérisant le comportement rhéologique du fluide et de la conduite. Elles sont exprimées dans le système C.G.S, qui est le plus approprié à l'échelle du réseau cardio-vasculaire (Buthaud 1977) :

la masse volumique commune des deux phases fluides 'p' est égale à  $1.06 \text{ g/cm}^3$ ;

la longueur de la conduite,  $l$ , égale à  $1 \text{ cm}$

la pulsation,  $\omega$  est prise égale à  $2\pi \text{ rad/s}$

la viscosité dynamique du manchon périphérique,  $\eta_p$ , égale à  $0.012 \text{ C.G.S}$ ;

la consistance du fluide,  $ok$ , égale à  $0.07 \text{ C.G.S}$ ;

l'indice de comportement,  $n$ , égale à  $0.5$ ;

le rayon au repos,  $R_0$ , égale à  $0.005 \text{ cm}$ ;

le coefficient d'élasticité  $K_e$  vaut  $10^{-7} \text{ cm}^4/\text{dyne}$

les composantes permanentes des pressions à l'entrée et à la sortie du tube valent respectivement  $5320 \text{ dyne/cm}^2$  et  $5220 \text{ dyne/cm}^2$  et leurs composantes oscillatoires  $532 \text{ dyne/cm}^2$  et  $522 \text{ dyne/cm}^2$ ;

la contrainte seuil du noyau  $\tau_0$  est égale à  $0.02 \text{ dyne/cm}^2$